Statistical Sciences Extension
Year 1 - Number 2 (P 63-68)

گسترهٔ علوم آماری
سال اول - شماره دوم (ص 63-68)

معرفی شبه فضای احتمال و بررسی شبه تابع مولد گشتاور و ویژگی‌های آن

لیدر نوایی *
استادیار، آمار، دانشگاه پیام نور

تاریخ دریافت: 1395/04/28 **تاریخ پذیرش**: 1395/06/25

Introduction of Pseudo-Probability Space and Studying of Pseudo-Moment Generator Function and Its Properties

L. Navaei*
Assistant Professor, Statistics, Payam Noor University

Received: 2016/07/18 **Accepted:** 2016/09/15

Abstract
In this paper for the first time we introduce the Pseudo-moment generator function and also we investigate some properties of $\left(M_j^{Å}(t)\right)$.

We prove some properties of Pseudo-expectation $\left(E^{Å}(j)\right)$ and Pseudo-dispersion $\left(s^{2Å}(j)\right)$.

Keywords
Pseudo - Probability, Pseudo - Moment Generator Function, Pseudo-Expectation.

چکیده
در این مقاله پس از معرفی شبه فضای احتمال، برای اولین بار شبه تابع مولد گشتاور $\left(M_j^{Å}(t)\right)$ را معرفی می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

همچنین برخی ویژگی‌های شبه امید ریاضی $\left(E^{Å}(j)\right)$ و شبه واریانس $\left(s^{2Å}(j)\right)$ را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

واژگان کلیدی
شبه فضای احتمال، شبه تابع مولد گشتاور، شبه امید ریاضی.

* **نویسنده مسئول**: لیدر نوایی

*Corresponding Author: leadernavaei@yahoo.com

مقدمه

کاربرد شبه انتگرال لبگ اشتیلتیس در نظریۀ احتمال (شبه نظریۀ احتمال) در مطالعات لندلیوا [2] و ویندوایس و گریس [4] و غیره مطرح شده است. همچنین کاربرد شبه آنالیز بر روی مشتق جزئی غیر خطی توسط پاپ [6] مورد بررسی قرار گرفته است. تعمیم انتگرال ریمان اشتیلتیس در زمینۀ شبه آنالیز در [7]و[8] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله قضایایی از شبه انتگرال لبگ اشتیلتیس و شبه انتگرال ریمان اشتیلتیس و ارتباط آنها با یکدیگر را بیان می‌کنیم و به بررسی تعاریف تازه‌ای از امیدهای ریاضی در شبه فضای احتمال خواهیم پرداخت.

همچنین در این مقاله شبه جمع و شبه ضرب و شبه تفریق و شبه توان را به صورت زیر تعریف و نشان خواهیم داد.

$$x \oplus y = g^{-1}\left(g(x)+g(y)\right)$$
$$x \ominus y = g^{-1}\left(g(x)-g(y)\right)$$
$$x \odot y = g^{-1}\left(g(x).g(y)\right)$$
$$|x|^{\oplus} = g^{-1}\left(\left|g(x)\right|\right)$$

به طوری‌که تابع $g:R\rightarrow R$ یک تابع اکیدا یکنوا و پیوسته بوده و در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$g: R \rightarrow R, g(0) = 0, g(1) = 1$$

در بخش «مفاهیم مقدماتی» ما تعاریف پایه‌ای و شبه انتگرال لبگ اشتیلتیس (شبه انتگرال ریمان اشتیلتیس (RS)) را بیان می‌کنیم و در بخش «معرفی شبه فضای احتمال» شبه فضای احتمال و رابطه بین شبه انتگرال لبگ و شبه انتگرال لبگ اشتیلتیس را بیان می‌کنیم و در بخش «کاربردها» از قضایای بخش «معرفی شبه فضای احتمال» در بررسی ویژگی‌های شبه امید ریاضی استفاده خواهیم کرد.

مفاهیم مقدماتی

در این بخش مفاهیم ضروری و تعاریف پایه مانند شبه عملگرها را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید [a,b] فاصله بسته از $[-\infty,+\infty]$ و همگی به ترتیب $\leq$ مرتب شده باشند. تعریف زیر را در نظر بگیرید.

یک شبه جمع، تابعی است از $\oplus:[a,b]\times[a,b]\rightarrow[a,b]$ که دارای ویژگی‌های جابجایی و شرکت‌پذیری بوده و غیر نزولی است و عضو صفر آن را به صورت صفر نشان می‌دهیم.

یک شبه ضرب، تابعی است از $\odot:[a,b]\times[a,b]\rightarrow[a,b]$ که دارای ویژگی‌های جابجایی و شرکت‌پذیری بوده و غیر نزولی است. .با فرض $x\leq y$ داریم:

$x\odot z \leq y\odot z, z\in[a,b]_{+}=\{x: x\in[a,b], x\geq 0\}$ و عضو یکانی یک به صورت 1 نوشته می‌شود. ویژگی‌های زیر را داریم:

$$-\ 0\odot x = 0$$
$$-\ x\odot(y\oplus z)=(x\odot y)+(x\odot z)$$
$$-\ x\odot(y\odot z)=(x\odot y)\odot z$$

تعاریف مختلفی برای شبه جمع و شبه ضرب و شبه تفریق و شبه توان انجام شده است که ما در این جا تعریف خاص خود را بیان می‌کنیم.

تعریف 1: فرض کنید g تابع اکیدا یکنوا بر روی $[a,b]\subseteq[-\infty,+\infty]$ با $g(0) = 0, g(1) = 1$ تعریف شده باشد. مفهوم وتعمیم شبه جمع و شبه تفریق و شبه ضرب و شبه قدر مطلق به صورت زیر است.

$$x \oplus y = g^{-1}\left(g(x)+g(y)\right) \qquad (1)$$
$$x \ominus y = g^{-1}\left(g(x)-g(y)\right) \qquad (2)$$
$$x \odot y = g^{-1}\left(g(x).g(y)\right) \qquad (3)$$
$$|x|^{\oplus} = g^{-1}\left(\left|g(x)\right|\right) \qquad (4)$$

g^{-1} شبه تابع معکوس g می‌باشد و g یک تابع یک به یک و پوشا و یکنوا و $g:[a,b]\rightarrow[0,\infty]$ می‌باشد

همچنین شبه توان $x_{\odot}^{n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^{n\oplus} = \underbrace{x \odot x \odot x \odot \dots \odot x}_{n}$$

در واقع اگر $x \odot y = g^{-1}\left(g(x).g(y)\right)$

آنگاه $x^{n\oplus} = g^{-1}\left(g^{n}(x)\right)$

تعریف 2: فرض کنید g یک تابع مولد در تعریف 1 و f f f یک تابع کران‌دار تعریف شده روی خط حقیقی باشد. نگاشت $m: c \to [a,b]$ تابع مجوعه‌ای - g_f نامیده می‌شود اگر

$$m\left((c,d]\right) = g^{-1}\left(f(d) - f(c)\right) \tag{8}$$

تعریف 3: فرض کنید تابع f بر روی فاصله [C,d] با مقادیری در [a,b] تعریف شده باشد. اگر f در فاصله (C,d) مشتق‌پذیر و مانند تابع g یکنوا باشد مشتق g(f(x)) بر $x \in (c,d)$ را مانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d^{\oplus} f(x)}{dx} = g^{-1}\left(\frac{d}{dx} g\left(f(x)\right)\right) \tag{9}$$

قضیه 1: فرض کنید f_1 و f_2 دو تابع بر روی [c,d] با مقادیری در [a,b] تعریف شوند. اگر هر دو تابع مشتق‌پذیر باشند، آنگاه داریم:

$$\frac{d^{\oplus}(f_1 \odot f_2)}{dx} = \left(\frac{d^{\oplus} f_1}{dx} \odot f_2\right) \oplus \left(f_1 \odot \frac{d^{\oplus} f_2}{dx}\right) \tag{10}$$

فرض کنید تابعg بر [a,b] تعریف شده باشد و $\oplus$ و $\odot$ شبه عملگرها در (1)و(2) باشند و همچنین فرض کنید f تابعی کراندار بر روی خط حقیقی و m تابع مجموعه‌ای باشد. اگر $p = \left\{\left(w_i\left(x_{i-1}, x_i\right]\right)\right\}_{i=1}^{n}$ یک افرازی مرتبی از [C,d] باشد یعنی: $c = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n = d$ و $w_i \in \left(x_{i-1}, x_i\right]$ ، انگاه مجموع شبه ریمان اشتیلتیس تابع f وابسته به f برای افراز P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\oplus_p f = \oplus_{i=1}^{n} f(w_i) \odot m\left(\left(x_{i-1}, x_i\right]\right)$$

به طوری که

$$f:[c,d] \to [a,b]$$

تعریف 4: تابع $f:[c,d] \to [a,b]$ یک شبه انتگرال ریمان- اشتیلتیس وابسته به تابع f در بازه $[c,d]$ گویند هرگاه برای هر عدد حقیقی PI در شرایط زیر صدق کند:

بازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $\delta > 0$ که $d\left(\oplus_p f, PI\right) < \varepsilon$ و برای تمام افرازهای P از $[c,d]$ داشته باشیم:

$$\max\left\{\left|x_i - x_{i-1}\right|, 1 \le i \le n\right\} < \delta$$

عدد PI شبه انتگرال ریمان اشتیلتیس تابع f بر روی $[c,d]$ است و به صورت $(pRs)\int_{[c,d]}^{(\oplus,\odot)} f\,df$ نشان می‌دهیم.

قضیه 2 [6و8]: اگر f شبه انتگرال ریمان اشتیلتیس روی $[c,d]$ باشد انگاه gof تابع انتگرال ریمان اشتیلتیس روی $[c,d]$ است و داریم:

$$(pRs)\int_{[c,d]}^{(\oplus,\odot)} f\,df = g^{-1}\left((Rs)\int_{c}^{d} gof\,df\right) \tag{11}$$

قضیه 3 [2]: فرض کنید f_1 و f_2 هر دو تابع انتگرال‌پذیر روی $[c,d]$ با مقادیری در $[a,b]$ باشد. انگاه به ازای هر $\lambda \in [a,b]$ داریم:

$$A)\int_{[c,d]}^{\oplus}(f_1 \oplus f_2)dx = \int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 dx \oplus \int_{[c,d]}^{\oplus} [c,d]dx$$

$$B)\int_{[c,d]}^{\oplus}(\lambda \odot f)dx = \lambda \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f dx$$

$$c)\int_{[c,d]\cup[e,f]}^{\oplus} f dx = \int_{[c,d]}^{\oplus} f dx \oplus \int_{[e,f]}^{\oplus} f dx$$

قضیه 4 [4]: فرض کنید f تابعی پیوسته و g تابعی مشتق پذیر در بازه (c,d) باشد، آنگاه برای هر $x \in (c,d)$ داریم:

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} \frac{d^{\oplus} f}{dx} \oplus f(c) = f(x) \qquad (12)$$

معرفی شبه فضای احتمال

فرض کنید $([a,b],\oplus,\odot)$ یک نیم حلقه باشد و $[a,b]\subseteq[-\infty,+\infty]$ و Ω یک مجموعه غیر تهی و S یک δ- جبر از زیر مجموعه‌های مجموعه Ω باشد.

شبه احتمال P را به صورت تابعی از $P:S\to[a,b]$ تعریف می‌کنیم که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$i)\ p(\emptyset)=0 \qquad p(\Omega)=1$$

برای A_i های دو به دو جدا از هم و $A_i\in S, i\in N$ داریم:

$$ii)\ p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\bigoplus_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

به سه تایی (Ω,S,P) شبه فضای احتمال گویند. فرض کنید $p=goP$ اگر $\varphi:\Omega\to R$ متغیر تصادفی باشد شبه انتگرال لبگ تابع φ به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\int^{\oplus}\varphi\, dP = g^{-1}\left(\int gof \quad dp\right) \qquad (13)$$

فرض کنید φ انتگرال متغیر تصادفی و F تابع توزیع باشد ما مفهومی مانند شبه تابع توزیع ، شبه اندازه لبگ اشتیلتیس وشبه انتگرال لبگ اشتیلتیس را تعریف می‌کنیم.

تعریف 5: فرض کنید سه تایی(Ω,S,P) شبه فضای احتمال و $\varphi:\Omega\to R$ متغیر تصادفی باشد. شبه تابع توزیع $F_g:R\to R$ از متغیر تصادفی φ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$F_g(x)=p(\varphi<x)=p(\{w:\varphi(w)<x\})$$

قضیه 5 [2]: فرض کنید سه تایی (Ω,S,P) شبه فضای احتمال و $F_g:R\to R$ تابع توزیعی از متغیر تصادفی φ آنگاه $F_g=g^{-1}oF$.

قضیه 6 [2]: فرض کنید φ یک متغییر تصادفی انتگرال‌پذیر، F_g شبه تابع توزیع و $F=goF_g$ تابع توزیع آن و $f:R\to R$ یک تابع اندازه پذیر بورل باشد. آنگاه شبه انتگرال لبگ اشتیلتیس f نسبت به F_g را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\int^{\oplus} f\,dF_g = g^{-1}\left(\int gof \quad dF\right)$$

در ادامه رابطهٔ بین انتگرال لبگ و انتگرال لبگ اشتیلتیس را بیان می‌کنیم. فرض کنید φ متغیر تصادفی با تابع توزیع F و $f:R\to R$ یک تابع اندازه پذیر بورل باشد و هر گاه یکی از انتگرال‌های زیر موجود باشد، آنگاه تابع $fo\varphi$ متغیر تصادفی و

$$\int fo\varphi \quad dp=\int f\,dF \qquad (14)$$

قضیه 7 [2]: فرض کنید سه تایی (Ω,S,P) شبه فضای احتمال و p احتمال باشد و همچنین φمتغیر تصادفی با شبه تابع توزیع F_g و $F=goF_g$ و $f:R\to R$ یک تابع اندازه‌پذیر بورل باشد آنگاه تابع $fo\varphi$ یک متغیر تصادفی است و

$$\int^{\oplus} fo\varphi \quad dp = \int^{\oplus} f\,dF_g$$ هرگاه یکی از

انتگرال‌ها موجود باشد.

کاربردها

در این بخش $E^{\oplus}(\varphi)$ و $\sigma^{2\oplus}(\varphi)$ و $M_{\varphi}^{\oplus}(t)$ را تعریف می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آنها می‌پردازیم.

تعریف 6: فرض کنید سه تایی (Ω,Σ,P) شبه فضای احتمال باشد اگر انتگرال متغیر تصادفی $\varphi:\Omega\to R$ موجود باشد آنگاه $E^{\oplus}(\varphi)=\int_{\Omega}^{\oplus}\varphi\, d\phi<\infty$ را شبه میانگین متغیر تصادفی φ گویند.

لم 1: اگر φ متغیر تصادفی باشد آنگاه رابطه‌های زیر برقرارند:

$$A)\ E^{\oplus}(\varphi\oplus a)=E^{\oplus}(\varphi)\oplus a \qquad a\in R$$
$$B)\ E^{\oplus}(\varphi\ominus a)=E^{\oplus}(\varphi)\ominus a \qquad a\in R$$
$$C)\ E^{\oplus}(\lambda\odot\varphi)=\lambda\odot E^{\oplus}(\varphi) \qquad \lambda\in R$$
$$D)\ E^{\oplus}(\lambda\odot(\varphi\oplus a))=\lambda\odot E^{\oplus}(\varphi)\oplus\lambda\odot a \qquad \lambda,a\in R$$

اثبات:
با استفاده از قضیه 6 میتوان نوشت :

$$A)\ E^{\oplus}(\varphi\oplus a)=\int_{\Omega}^{\oplus}(\varphi\oplus a)dP=\int_{\Omega}^{\oplus}\varphi\, dP\oplus\int_{\Omega}^{\oplus}a\,dP=E^{\oplus}(\varphi)\oplus a$$
$$B)\ E^{\oplus}(\varphi\ominus a)=\int_{\Omega}^{\oplus}(\varphi\ominus a)dP=E^{\oplus}(\varphi)\ominus a$$
$$C)\ E^{\oplus}(\lambda\odot\varphi)=\int_{\Omega}^{\oplus}(\lambda\odot\varphi)dP=\lambda\odot\int_{\Omega}^{\oplus}\varphi\, dP=\lambda\odot E^{\oplus}(\varphi)$$
$$D)\ E^{\oplus}(\lambda\odot(\varphi\oplus a))=\int_{\Omega}^{\oplus}\lambda\odot(\varphi\oplus a)dP=\int_{\Omega}^{\oplus}((\lambda\odot\varphi)\oplus(\lambda\odot a))dP$$
$$=\int_{\Omega}^{\oplus}(\lambda\odot\varphi)dP\oplus\int_{\Omega}^{\oplus}(\lambda\odot a)dP=\lambda\odot E^{\oplus}(\varphi)\oplus(\lambda\odot a).$$

تعریف 7: فرض کنید $\varphi:\Omega\to R$ یک متغیر تصادفی انتگرال پذیردر (Ω,Σ,P) باشد.اگر متغیر تصادفی $(\varphi\ominus(E^{*}(\varphi)))^{2\oplus}$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه گوییم φ دارای شبه واریانس است به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma^{2\oplus}(\varphi)=E^{\oplus}(\varphi\ominus(E^{\oplus}(\varphi)))^{2\oplus}$$

قضیه 8: فرض کنید (Ω,Σ,P) شبه فضای احتمال باشد آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$\sigma^{2\oplus}(\varphi)=E^{\oplus}(\varphi^{2\oplus})\ominus E^{\oplus}(\varphi)^{2\oplus}$$

اثبات: طبق لم‌های 1 . 2 و 1 . 4 می‌توان نوشت:

$$\sigma^{2\oplus}(\varphi)=E^{\oplus}(\varphi\ominus E^{\oplus}(\varphi))^{2\oplus}=E^{\oplus}((\varphi\ominus(E^{\oplus}(\varphi)))\odot((\varphi\ominus(E^{\oplus}(\varphi)))))$$
$$=E^{\oplus}(\varphi^{2\oplus}\ominus(\varphi\odot E^{\oplus}(\varphi))\ominus(E^{\oplus}(\varphi)\odot\varphi)\oplus(E^{\oplus}(\varphi))^{2\oplus})$$
$$=E^{\oplus}(\varphi^{2\oplus}-2\odot E^{\oplus}(\varphi)\odot\varphi\oplus(E^{\oplus}(\varphi))^{2\oplus})$$
$$=E^{\oplus}(\varphi^{2\oplus})-2\odot(E^{\oplus}(\varphi))^{2\oplus}\oplus(E^{\oplus}(\varphi))^{2\oplus}$$
$$=E^{\oplus}(\varphi^{2\oplus})\ominus(E^{\oplus}(\varphi))^{2\oplus}$$

تعریف 8: فرض کنید سه تایی (Ω,Σ,P) شبه فضای احتمال و $\varphi:\Omega\to R$ متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر باشد. اگر شبه امید $e^{t\odot x}$ موجود و $t\in(-h,h)$ و $h>0$ آنگاه گوییم φ دارای شبه تابع مولد گشتاور است و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_X^{\oplus}(t)=E(e^{t\odot x})=\int_{\Omega}^{\oplus}e^{t\odot x}dP$$

لم 2: فرض کنید سه تایی (Ω,Σ,P) شبه فضای احتمال باشد. برای هر $a\in R$ داریم:

$$M^{\oplus}_{e^{t\odot x}}(t)=M^{\oplus}_{\varphi}(a\odot t)$$

اثبات: طبق تعریف $M_X^{\oplus}(t)$ و بخش 2 داریم:

$$M^{\oplus}_{e^{t\odot x}}(t)=E^{\oplus}(e^{t\odot(a\odot\varphi)})=E^{\oplus}(e^{(t\odot a)\odot\varphi})=M^{\oplus}_{\varphi}(a\odot t)$$

قضیه 9: فرض کنید (Ω, S, P) سه تایی شبه فضای احتمال و $\varphi : \Omega \to R$ یک متغیر تصادفی باشد. نشان دهید که رابطه

$$\frac{d^{\oplus} M_{\varphi}^{\oplus}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = E^{\oplus}(\varphi)$$

همواره برقرار است.

اثبات: با استفاده از روابط 9 و 10 داریم:

$$M_{\varphi}^{\oplus}(t) = E\left(e^{t \odot x}\right)$$

$$\frac{d^{\oplus} M_{\varphi}^{\oplus}(t)}{dt} = \frac{d^{\oplus} E\left(e^{t \odot x}\right)}{dt} = \frac{d^{\oplus}}{dt}\left(\int_{\Omega}^{\oplus} e^{t \odot x} dp\right) = \int_{\Omega}^{\oplus} \left(\frac{d\varphi}{dt} \odot t \odot e^{t \odot x} \right) dP$$

$$\frac{d^{\oplus} M_{\varphi}^{\oplus}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \int_{\Omega}^{\oplus} \varphi \, dP = E^{\oplus}(\varphi)$$

منابع

[1] Kolesarova, A., Integration of real function with respect to a -measure. Math.Slovaca 46 No. 1 (1996), 41–52.

[2] Lendelov, K, On the pseudo-lebesgue-stieltjes integral. Novi sad Journal of Mathematics vol .36, No. 2, (2006). 125–136.

[3] Marinova, I., Inttegration with respect to a -measure. Math .Slovaca36 No. 1 (1986), 15–26.

[4] Nedovic, L. M., Grbic, T., The pseudo probability. Journal of Electrical Engineering 53(2002), 27–31.

[5] Pap, E., An integral generated by decomposable measure. Univ. Novom Sadu Zb. Rad. Prirod-Mat. Vol. 20 No. 1 (1990): 135–144.

[6] Pap, E., Applications of the generated pseudo-Analysis on nonlinear partial differential equations,

[7] Pap, E., Null-Additive Set Functions. Dordrecht: Kluwer Academic publishers, Bratislava: IsterScience 1995.

[8] Pap, E., Vivona, D., Non-commutative and associative pseudo-analysis and its applications onnonlinear partial differential equations, J. Math. Anal. Appl. 246(2) (2000) 390–408.

[9] Rudin W, Real and complex Analysis, New York, Mc Grow-Hill, 1960.

[01] Sugeno, M., Murofushi, T., Pseudo-addiittive measures and integrals. J. Math . Anal. 122(1987), 197–222.