Statistical Sciences Extension
Vol. 1, No. 2, Spring-Summer 2016, 2 (P 55-62)

گسترهٔ علوم آماری
سال اول، شماره دوم، بهار و تابستان 1395 (ص 55-62)

توزیع وایبل کوماراسوامی

فریبا نظری[*1]، **انوشیروان غفاری‌پور**[2]
1.کارشناسی ارشد، آمار، دانشگاه پیام نور
2. استادیار، ریاضی، دانشگاه یاسوج

تاریخ دریافت: 1395/04/17 **تاریخ پذیرش**: 1395/06/03

Kumaraswamy Weibull Distribution

F. Nazari*[1], A. Ghaffaripoor[2]
1. M.A., Statistics. Payame Noor Univesity
2. Assistant Professor, Mathematics, Yasouj University
Received: 2016/07/07 **Accepted:** 2016/08/24

چکیده
در این مقاله به معرفی توزیع وایبل کوماراسوامی و بیان برخی از ویژگی‌های این توزیع می‌پردازیم.

این توزیع یک مدل کاملاً منعطف در تحلیل داده‌های مثبت است. توزیع وایبل کوماراسوامی شامل زیرمدل‌های خاص از جمله توزیع‌های وایبل نمایی شده، رایلی نمایی شده، نمایی نمایی شده، وایبل و همچنین توزیع جدید نمایی کوماراسوامی است. عبارات صریح برای گشتاورها، تابع مولد گشتاورها و همچنین نتایجی از شبیه‌سازی بر روی توزیع را ارائه می‌دهیم.

واژگان کلیدی
توزیع کوماراسوامی، توزیع وایبل، نرخ شکست.

Abstract
In this article, we introduce the Kumaraswamy Weibull distribution and discuss some features of this distribution.

That is a quite flexible model in analyzing positive data. It contains special sub-models the exponentiated Weibull, exponentiated Rayleigh,exponentiated exponential,Weibull and also the new Kumaraswamy exponential distribution, Explicit Expressions for moments, moment generating function, and also we present the results of the simulation on the distribution.

Keywords
Kumaraswamy distribution, Weibull distribution, failure rate.

*** نویسنده مسئول**: فریبا نظری
*Corresponding Author: darvin2020@yahoo.com

مقدمه

توزیع وایبل یک مدل خیلی مشهور است که در دهه‌های اخیر برای مدل‌بندی داده‌ها در واقعیت، مهندسی و مطالعات زیستی به طور گسترده استفاده می‌شود. نیاز به ساختارهای نمایی‌شده توزیع وایبل در بسیاری از حوزه‌های کاربردی احساس می‌شود.

به طور مثال در [3] از یک توزیع وایبل نمایی‌شده برای مدل‌بندی ارتفاع ماکسیمم و معنادار موج‌ها استفاده شده‌است. بیشتر آماردانان در مورد عبارت طولانی استفاده از ساختارهای نمایی‌شده توزیع‌های وایبل در بسیاری از حوزه‌های کاربردی ناآگاه هستند.

در این بخش به معرفی توزیع وایبل کوماراسوامی (که با KumW نشان می‌دهیم) می‌پردازیم و توصیفی جامع از ویژگی‌های ریاضی آن ارایه می‌دهیم.

با در نظر گرفتن تابع توزیع تجمعی وایبل با پارامتر شکل $c > 0$ و پارامتر مقیاس $\lambda > 0$ یعنی

$$G_{\lambda,c}(x) = 1 - \exp\{-(\lambda x)^c\}$$

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی وایبل کوماراسوامی به صورت زیر است [1]

$$f(x) = abc\lambda^c x^{c-1}[\exp\{-(\lambda x)^c\}]^{a-1} \{1 - [1 - \exp\{-(\lambda x)^c\}]^a\}^{b-1} \quad (1)$$

و

$$F(x) = 1 - \{1 - [1 - \exp\{-(\lambda x)^c\}]^a\}^b \quad (2)$$

متغیر X با توزیع KumW مطابق با (1) به صورت $X \sim KumW(\lambda, c, a, b)$ نشان داده می‌شود.

تابع نرخ شکست به صورت زیر است

$$\tau(x) = \frac{abc\lambda^c x^{c-1}\exp\{-(\lambda x)^c\}[1 - \exp(-(\lambda x)^c\}]^{a-1}}{1 - [1 - \exp(-(\lambda x)^c\}]^a}$$

توزیع‌های وایبل، وایبل نمایی شده (EW) و نمایی نمایی‌شده (EE) به روشنی مهم‌ترین زیر مدل‌های (1) به ازای $a = b = 1$، $b = 1$ و $c = b = 1$ هستند.

زیر مدل‌های دیگر را می‌توان در جدول 1 مشاهده کرد. بدیهی است که (1) بسیار منعطف‌تر از توزیع‌های فهرست شده در جدول 1 است.

جدول 1. برخی زیرمدل‌های توزیع KumW

توزیع	λ	c	a	b
نمایی کوماراسوامی	-	1	-	-
ریلی کوماراسوامی	-	2	-	-
وایبل نمایی شده	-	-	-	1
نمایی نمایی شده	-	1	-	1
وایبل	-	-	1	1
رایلی	-	2	1	1
نمایی	-	1	1	1

توزیع KumW سه پارامتر شکل a، b و c دارد. هیچ توزیع چهار پارامتری دیگر که با این تعداد پارامتر شکل، وجود ندارد. سه پارامتر شکل موجب انعطاف‌پذیری بیشتر توزیع KumW می‌شود. بعداً نشان خواهیم داد که توزیع KumW پنج شکل شکست اصلی یعنی نرخ شکست‌های ثابت، صعودی، نزولی، گودالی و تک مدی را داراست. همچنین در ادامه نشان خواهیم داد که توزیع KumW حداقل برای دو مجوعه داده، برازش‌های بهتری از تمام زیرمدل‌های مهم آن (یعنی وایبل و EW و EE) فراهم می‌کند. مدل‌های چهار پارامتری دیگری که تمام این ویژگی‌ها را دارا باشد، وجود ندارد. اگر چنین مدل‌هایی وجود داشته باشد یا در آینده توسعه داده شود، عملکرد آنها با توجه به نرخ‌های شکست و توانایی آنها در مدل‌بندی مجموعه داده‌های مختلف تعیین می‌شود.

بسط تابع چگالی احتمال

با بسط دادن عبارت $\{1-G^a(x)\}^{b-1}$ در معادله تابع چگالی احتمال توزیع کوماراسوامی تعمیم یافته می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b}{j+1} h_{(j+1)a}(x) \quad (3)$$

که $h_a(x) = ag(x)G^{a-1}(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع G نمایی شده با پارامتر a یا توزیع G(a,1) را نمایش می‌دهد [2] وقتی $b>0$ عددی صحیح باشد، اندیس j در مجموع بالا در $b-1$ متوقف می‌شود.

معادله (3) نتیجه می‌دهد که تابع چگالی احتمال Kum-G آمیخته‌ای از توابع چگالی G(a, 1) بتا است.

با به کار بردن معادله (3) برای توزیع وایبل و بسط دادن دو جمله‌ای حاصل، می‌توان تابع چگالی احتمال KumW را به صورت یک آمیخته دوگانه از توابع چگالی احتمال وایبل بیان کرد

$$f(x) = \sum_{j,k=0}^{\infty} w_{j,k} g_{\lambda_k,c}(x) \quad (4)$$

که $\lambda_k = \lambda(k+1)^{1/c}$ و $g_{\lambda_k,c}(x)$ تابع چگالی احتمال وایبل با پارامترهای λ_k و c است و ضرایب $w_{j,k}$ به صورت زیر هستند

$$w_{j,k} = \frac{ab(-1)^{j+k}}{k+1}$$

اگر $b>0$ عددی صحیح باشد، اندیس j در معادله (4) در $b-1$ متوقف می‌شود و اگر $a>0$ صحیح باشد، اندیس k در $a(j+1)-1$ متوقف می‌شود.

می‌توان آمیخته دوگانه را با استفاده از تعریف $w_{+,k} = \sum_{j=0}^{\infty} w_{j,k}$ به یک آمیخته تکی کاهش داد. بنابراین تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع KumW می‌تواند بر حسب توابع وایبل متناظر به صورت زیر نوشته شود

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{+,k} g_{\lambda_k,c}(x)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{+,k} G_{\lambda_k,c}(x)$$

در معادله بالا اگر b عددی صحیح باشد، اندیس j در $b-1$ متوقف می‌شود و اگر a صحیح باشد، اندیس k در $a(j+1)-1$ متوقف می‌شود.

شکل

در این بخش شکل‌های تابع چگالی احتمال و تابع شکست توزیع KumW را به دست می‌آوریم. مشتق اول $\log(f(x))$ برای توزیع KumW عبارت است از

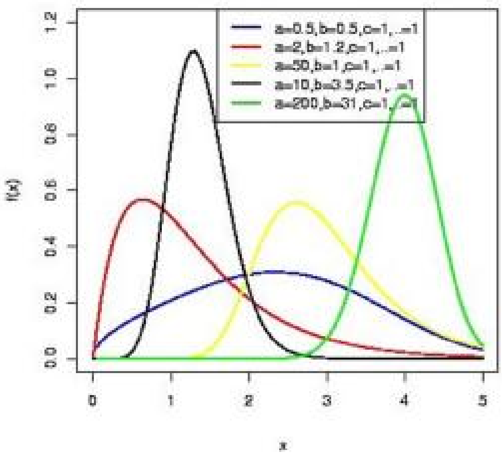
$$\frac{d\log\{f(x)\}}{dx} = \frac{c-1}{x} - c\lambda^c x^{c-1} + (a-1)c\lambda^c \frac{x^{c-1}\exp\{-(\lambda x)^c\}}{1-\exp\{-(\lambda x)^c\}} - a(b-1) c\lambda^c \frac{x^{c-1}\exp\{-(\lambda x)^c\}[1-\exp\{-(\lambda x)^c\}]^{a-1}}{1-[1-\exp\{-(\lambda x)^c\}]^a}$$

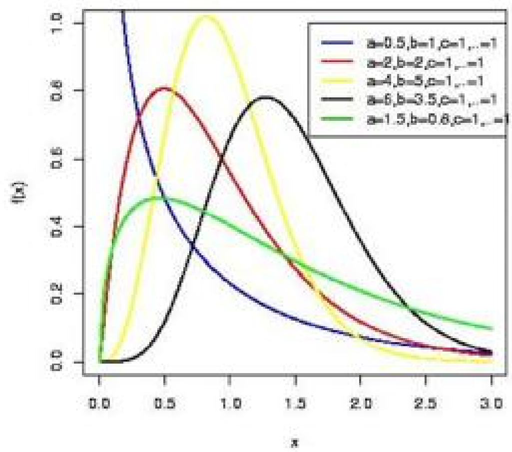
بنابراین نماهای f(x) ریشه‌های معادله زیر هستند

$$\frac{c-1}{x} - c\lambda^c x^{c-1} + (a-1)c\lambda^c \frac{x^{c-1}\exp\{-(\lambda x)^c\}}{1-\exp\{-(\lambda x)^c\}} = a(b-1) c\lambda^c \frac{x^{c-1}\exp\{-(\lambda x)^c\}[1-\exp\{-(\lambda x)^c\}]^{a-1}}{1-[1-\exp\{-(\lambda x)^c\}]^a} \quad (5)$$

معادله (5) ممکن است بیشتر از یک ریشه داشته باشد. اگر $x = x_0$ یک ریشه معادله (5) باشد، آنگاه بسته به اینکه $\omega(x_0) < 0$ یا $\omega(x_0) > 0$ یا $\omega(x_0) = 0$ نقطه ماکسیمم موضعی، مینیمم موضعی یا نقطه عطف است که $\omega(x) = d^2 \log\{f(x)\}/dx^2$ است.

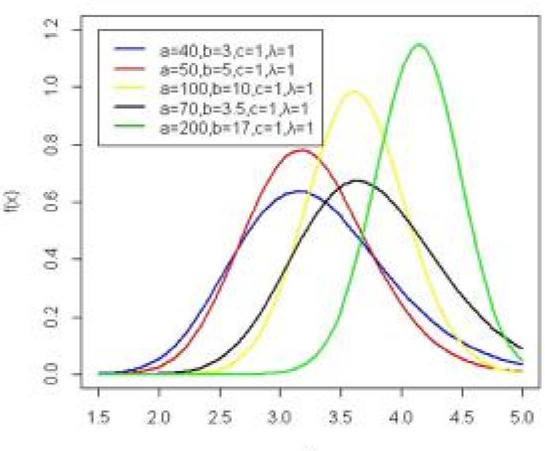
نمودارهای تابع چگالی احتمال KumW به ازای مقادیر پارامتر انتخاب شده در شکل 1 آورده شده‌است.

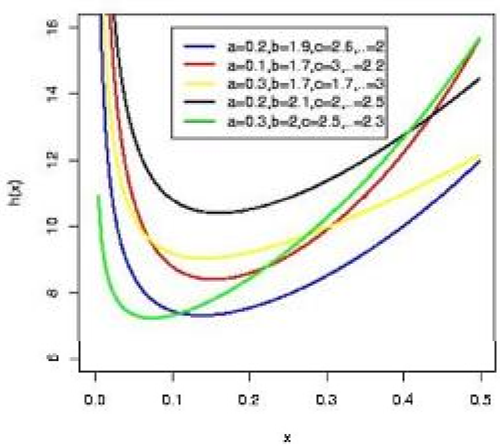


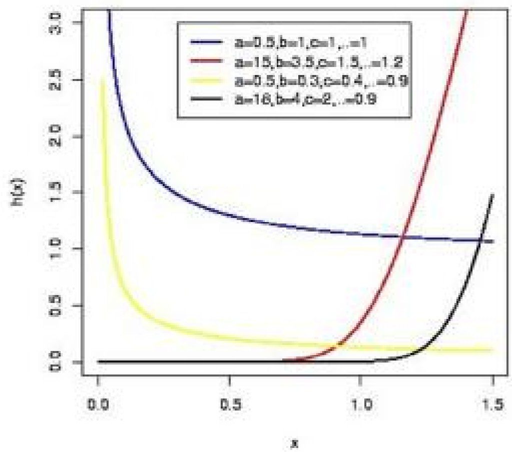


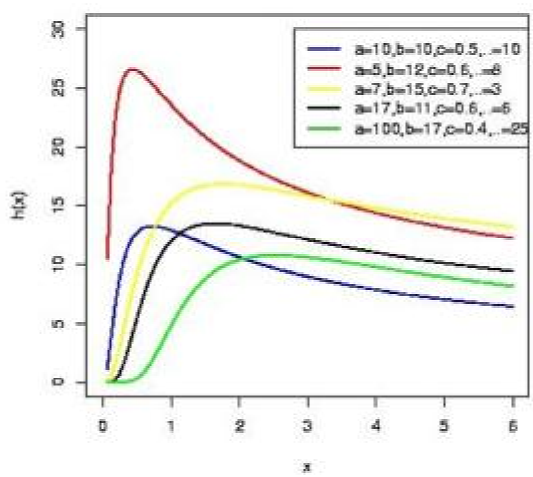
شکل 1. نمودارهای تابع چگالی توزیع کواراسوامی به ازای مقادیر مختلف پارامترها

تابع نرخ شکست KumW شامل هیچ تابع پیچیده‌ای نیست و می‌تواند به آسانی به صورت عددی محاسبه شود. علاوه بر این برای مدل‌بندی داده‌های کاملا انعطاف‌پذیر است. نمودارهای شکل‌های نرخ شکست KumW به ازای برخی مقادیر پارامتر در شکل 2 داده شده‌است.









شکل 2. نمودارهای نرخ شکست توزیع KumW

گشتاورها

گشتاورهای فاکتوریل، معکوس، مرکزی و معمولی توزیع KumW می‌تواند از یک ترکیب خطی موزون متناهی (یا نامتناهی اگر a و b هر دو صحیح باشند) از گشتاورهای مربوط به توزیع وایبل محاسبه شوند. به طور مثال گشتاور s ام توزیع وایبل با پارامترهای λ و c به صورت $\mu'_s = \Gamma(\frac{s}{c}+1)\lambda^{-s}$ است و سپس گشتاور تعمیم داده شده s ام از توزیع KumW به صورت زیر است

$$E(X^s) = \lambda^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{c+1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} w_{+,k}(k+1)^{-\frac{s}{c}} \qquad (6)$$

در معادله (6)، اگر a صحیح باشد، اندیس k در $a(j+1)-1$ متوقف می‌شود در حالی که اگر b عددی صحیح باشد، اندیس j در $b-1$ متوقف می‌شود. به ازای $a=b=1$ معادله (6) به طور دقیق گشتاور s توزیع وایبل را می‌دهد.

حال اندازه‌های چولگی و خمیدگی می‌تواند از گشتاورهای معمولی با استفاده از روابط معلوم محاسبه شود.

تابع مولد گشتاور

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال (1) و تابع مولد گشتاور $M(t) = E[\exp(tX)]$ باشد. دو نمایش برای $M(t)$ به دست می‌آوریم.

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{+,k} I_k(t), \qquad (7)$$

که

$\lambda_k = \lambda(k+1)^{\frac{1}{c}}$،

$v_{j,k} = c\lambda^c w_{j,k}(k+1)$،

$v_{+,k} = \sum_{j=0}^{\infty} v_{j,k}$

و $I_k(t) = \int_0^{\infty} x^{c-1}\exp\{tx-(\lambda_k x)^c\}dx$ است.

در معادله (7)، اندیس j (در ضریب $v_{+,k}$) در $b-1$ متوقف می‌شود اگر b صحیح باشد در حالی که اندیس k در $a(j+1)-1$ متوقف می‌شود اگر a صحیح باشد. اولین نمایش برای $I_k(t)$ا استفاده از تابع فوق هندسی تعمیم داده شده رایت به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
I_k(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \int_0^{\infty} x^{m+c-1} \exp\{-(\lambda_k x)^c\}\, dx \\
&= \frac{1}{c\lambda_k^c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{\lambda_k}\right)^m}{m!} \Gamma\left(\frac{m}{c}+1\right) \\
&= \frac{1}{c\lambda_k^c}\, {}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix}(1,1/c) \\ -\end{matrix}; \frac{t}{\lambda_k}\right] \qquad (8)
\end{aligned}
$$

به شرط این که $c > 1$. با ترکیب معادلات (7) و (8) (به شرط این که $c > 1$) داریم

$$
M(t) = c^{-1}\lambda^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_{+,k}}{(k+1)^c}\, {}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix}(1,1/c) \\ -\end{matrix}; \frac{t}{\lambda_k}\right]
$$

نمایش دوم برای $M(t)$ بر اساس G تابع میژر است. از نتیجه $\exp\{-g(x)\}G_{0,1}^{1,0}(g(x)|0)$ برای یک تابع $g(.)$ دلخواه، $I_k(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$
\begin{aligned}
I_k(x) &= \int_0^{\infty} x^{c-1} \exp\{sx - (\lambda_k x)^c\}\, dx \\
&= \int_0^{\infty} x^{c-1} \exp(sx) G_{0,1}^{1,0}\left(\lambda_k^c x^c \middle|\, {}^{-}_{0}\right) dx
\end{aligned}
$$

حال فرض می‌کنیم که $c = p/q$ که $p \geq 1$ و $q \geq 1$ اعداد صحیح نسبت به هم اول‌اند.

توجه کنید که این شرط برای محاسبه انتگرال $I_k(t)$ محدودیت نیست چون هر عدد حقیقی می‌تواند به وسیله یک عدد گویا تقریب‌زده شود. با استفاده از معادله (2.24.1.1) در [4] می‌توان رابطه زیر را به دست آورد

$$
I_k(t) = \frac{p^{c-\frac{1}{2}}(-t)^{-c}}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}-1}} G_{p,q}^{p,p} \left(\frac{(\lambda_k c)^q p^q}{(-t)^p q^p} \middle|\, \begin{matrix} \frac{1-c}{p}, \frac{2-c}{p}, \dots, \frac{p-c}{p} \\ 0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q} \end{matrix} \right)
$$

با توجه به (7) و معادله آخر داریم

$$
M(t) = \frac{p^{c-\frac{1}{2}}(-t)^{-c}}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}-1}} v_{+,k} G_{p,q}^{p,p} \left(\frac{(\lambda_k c)^q p^q}{(-t)^p q^p} \middle|\, \begin{matrix} \frac{1-c}{p}, \frac{2-c}{p}, \dots, \frac{p-c}{p} \\ 0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q} \end{matrix} \right)
$$

واضح است فرمول‌های خاص برای تابع مولد گشتاور توزیع‌های نمایی کوماراسوامی، وایبل نمایی‌شده، رایلی نمایی شده و وایبل با استفاده از جای‌گذاری پارامترهای معلوم در نمایش بالا به دست می‌آید.

شبیه سازی

دو روش برای شبیه‌سازی از توزیع KumW (1) وجود دارد. ابتدا از روش معکوس استفاده می‌کنیم. توجه کنید که تابع توزیع تجمعی معکوس متناظر با معادله (1) عبارت است از

$$
F^{-1}(u) = G^{-1}\left\{\left[1-(1-u)^{\frac{1}{b}}\right]^{\frac{1}{a}}\right\}
$$

که $G^{-1}(z) = \lambda^{-1}[-\log(1-z)]^{1/c}$ تابع چندک مبنا است.

تابع چندک $F(x)$ به آسانی از تابع چندک $G(x)$ به دست می‌آید؛ بنابراین می‌توان متغیرهای KumW را از رابطه زیر تولید کرد

$$X = \lambda^{-1}[-\log\{1 - [1-(1-U)^{1/b}]^{\frac{1}{a}}\}]^{1/c}$$

که U یک متغیر یکنواخت روی بازه واحد $(0,1)$ می‌باشد.

روش دوم شبیه‌سازی از توزیع KumW بر اساس روش رد می‌باشد. که اگر $a \geq 1$ و $b \geq 1$ باشد، برقرار است. ثابت M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M = \frac{a^b b(a-1)^{1-1/a}(b-1)^{b-1}}{(ab-1)^{b-1/a}}$$

آنگاه طرح زیر برای شبیه‌سازی متغیرهای KumW برقرار است:

1. $X = x$ را از تابع چگالی احتمال وایبل $g_{\lambda,c}(x)$ شبیه‌سازی کنید.
2. $Y = UMg_{\lambda,c}(x)$ را شبیه‌سازی کنید که U یک متغیر یکنواخت روی بازه واحد $(0,1)$ است.
3. $X = x$ را به عنوان متغیر KumW بپذیرید اگر $Y < f(x)$ و اگر $Y \geq f(x)$ به گام 2 برگردید.

جدول 2. MLE پارامترهای مدل برای داده‌های ولتاژ و مقادیر AIC، CAIC و BIC

مدل	a	b	c	λ	AIC	CAIC	BIC
KumW	0.0516 (0.0241)	0.2288 (0.0905)	7.7026 (0.2191)	0.0043 (0.0003)	352.3	353.9	357.9
EW	0.1334 (0.0253)	1 -	7.2105 (0.2009)	0.0031 (0.0002)	359.6	360.5	363.8
EE	1.1543 (0.2734)	1 -	1 -	0.0062 (0.0014)	374.2	374.7	377.0
Weibull	1 -	1 -	1.2650 (0.2044)	0.0053 (0.0008)	372.6	373.1	375.4

مثال کاربردی

در این بخش با استفاده از مجموعه داده مطالعه شده در [5]، انعطاف و کاربردی بودن مدل پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

بدین منظور نتایج برازش توزیع‌های KumW، EW، EE و وایبل را برای مجموعه داده ارایه می‌دهیم.

جدول 2های (و خطاهای استاندارد منتاظر در پارامترها) پارامترها و مقادیر آماره‌های AIC (معیار اطلاع اکایک)، BIC (معیار اطلاع بیزی) و CAIC (معیار اطلاع اکایک سازگار) را برای چند مدل ارائه می‌دهد.

این نتایج نشان می‌دهد که مدل KumW کمترین مقادیر AIC، BIC و CAIC را در میان تمام مدل‌های برازش شده را دارد و بنابراین می‌تواند به عنوان بهترین مدل انتخاب شود.

References

[1] G. M. Cordeiro, E. M. M. Ortega and S. Nadarajah, {\em The Kumaraswamy Weibull distribution with application to failure data}, Journal of the Franklin Institute 347(2010)1399–1429.

[2] N. Eugene, C. Lee and F. Famoye, {\em Beta-normal distribution and its applications}, Communications in Statistics — Theory and Methods 31 (2002) 497–512.

[3] W. Q. Meeker and L. A. Escobar, {\em Statistical Methods for Reliability Data}, John Wiley, New York, 1998.

[4] G. Muraleedharan, A. D. Rao, P. G. Kurup, N. Unnikrishnan Nair and M. Sinha, {\em Modified Weibull distribution for maximum and significant wave height simulation and prediction}, Coastal Engineering 54(2008) 630–638.

[5] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov and O. I. Marichev, {\em Integrals and Series}, vol.1, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1986.