گسترهٔ علوم آماری
سال اول - شماره دوم (ص 49-54)

Statistical Sciences Extension
Year 1 - Number 2 (P 49-54)

چند جمله‌ای‌های استرلینگ و کاربرد آنها در حل انتگرال‌ها

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی *
مربی، آمار، دانشگاه پیام نور

تاریخ دریافت: 1395/05/16 **پذیرش پذیرش**: 1395/06/25

Sterling Polynomials and their Application in Solving Integrals

Sh. Yaghoobzadeh Shahrastani*
Lecturer, Statistics, Payame Noor University

Received: 2016/08/06 **Accepted:** 2016/09/15

چکیده

در این مقاله ابتدا چندجمله‌ای‌های استرلینگ معرفی و روش محاسبه آنها در نرم‌افزار R و کاربردشان در حل رده‌ای از انتگرال‌ها را بیان می‌کنیم که در محاسبه گشتاورها، گشتاورهای آماره‌های مرتب، آنتروپی‌های رنی و شانون و... در توزیع‌های آماری بر حسب این نوع انتگرال‌ها، نقش بسزایی دارد. سپس با استفاده از آن، گشتاورهای دو توزیع آماری مرتبط با این انتگرال‌ها را به دست می‌آوریم.

واژگان کلیدی

چند جمله‌ای‌های استرلینگ، انتگرال، گشتاورها.

Abstract

This article first introduces the sterling polynomials and expresses the calculation methods in software R and their application in resolving a class of integrals which play an important role in the calculation of torques, torques of order statistics, Renyi and Shannon entropies in statistical distributions based on this type of integrals. Then, we obtain the torques of the two statistical distributions related to these integrals.

Keywords

Sterling Polynomials, Integral, Moments.

* **نویسنده مسئول**: شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی

*Corresponding Author: yagoubzade@gmail.com

مقدمه

وارد (1934) چند جمله‌ای‌های استرلینگ را معرفی کرد. رابطه‌ای بسیار مهم در بارهٔ چند جمله‌ای‌های استرلینگ که با نماد $\psi_n(.)$ نشان داده می‌شود و در بخش دوم بیشتر دربارهٔ آن توضیح داده می‌شود وجود دارد که به صورت زیر است.

برای $|z|<1$ و هر $\delta \in R$ داریم:

$$\left(-\log(1-z)\right)^{\delta} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\delta) z^{m+\delta} \qquad (1)$$

(وارد، 1934) رابطه (1) را به روش‌های مختلف اثبات کرد و به کاربردی از آن اشاره نکرده است. (کاستلارس و لمونته، 2014) با استفاده از (وارد، 1934) شش چند جمله‌ای استرلینگ اول را محاسبه کرده است که در بخش دوم به آن اشاره می‌شود. همچنین نشان داد که می‌توان تابع چگالی احتمال توزیع وایبول تعمیم یافته را به صورت یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های استرلینگ نوشت. (نداراجا و همکاران، 2015) و (پینهو و همکاران، 2012) نیز به کمک بسط مک لورن $\log(1-z)$ و سپس تبدیل $\left(-\log(1-z)\right)^{\delta}$ به بسط هایی پیچیده‌تر به محاسبه گشتاورهای مرکزی، گشتاورهای آماره‌های مرتب، میانگین انحرافات و منحنی‌های بن فرنی و لورنتز پرداختند به طوری‌که در این دو مقاله به چند جمله‌ای‌های استرلینگ و کاربردهای آن پرداخته نشد. در صورتی که استفاده از رابطه (1) می‌تواند در محاسبه ویژگی‌های توزیع‌های آماری مؤثرتر باشد. بنابراین در این مقاله در بخش دوم ضمن توضیحی بیشتر در باره چند جمله‌ای‌های استرلینگ، الگوریتمی برای محاسبه آنها در نرم‌افزار R ارائه می‌شود که بسیار راحت‌تر می‌توان به محاسبه چند جمله‌ای‌های استرلینگ پرداخت. همچنین به شیوه‌ای متفاوت‌تر از روش‌های (وارد، 1934) به اثبات رابطه (1) می‌پردازیم. در بخش سوم با استفاده از چند جمله‌ای‌های استرلینگ یک جواب عمومی برای رده‌ای از انتگرال‌ها ارائه می‌دهیم که می‌تواند در محاسبه ویژگی‌های توزیع‌های آماری مرتبط با این نوع انتگرال‌ها مؤثر باشد. همچنین برای توضیح بیشتر و تکمیل‌تر و نشان دادن کاربردی از چند جمله‌ای‌های استرلینگ در انتگرال‌ها، دو توزیع آماری را انتخاب کرده و گشتاورهای مرکزی آنها محاسبه شده است. البته نتایج به دست آمده در بخش سوم می‌تواند در محاسبه دیگر ویژگی‌های توزیع‌های آماری مانند گشتاورهای آماره‌های مرتب، آنتروپی‌های رنی و شانون، منحنی‌های بن فرنی و لورنتز اشاره کرد. در بخش4 نیز نتایج مقاله آورده شده است.

چند جمله‌ای‌های استرلینگ

چند جمله‌ای‌های استرلینگ را با نماد $\psi_n(.)$ نشان می‌دهیم که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned}\psi_{n-1}(w) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\Bigg[& H_n^{n-1} - \frac{w+2}{(n+2)} H_n^{n-2} \\ & + \frac{(w+2)(w+3)}{(n+2)(n+3)} H_n^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \\ & \times \frac{(w+2)(w+3)\dots(w+n)}{(n+2)(n+3)\dots(2n)} H_n^{0} \Bigg]\end{aligned}$$

که در آن H_n^m ها اعداد صحیح مثبت هستند و در روابط

$$\begin{aligned}& H_{(0)}^{(0)} = H_{(n+1)}^{n} = 1, H_{(n+1)}^{m} = (2n+1-m)H_n^m \\ & +(n-m+1)H_n^{(m-1)} \\ & H_{(n+1)}^{0} = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)\end{aligned}$$

صدق می‌کنند. در این مقاله ضرایب $\rho_m(.)$ را برحسب چندجمله‌ای‌های استرلینگ به صورت زیر تعریف و از آن استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}& \rho_0(\delta) = 1, m \geq 1 \\ & \rho_m(\delta) = m\psi_{m-1}(m+\delta-1)\end{aligned}$$

(کاستلارس و لمونته، 2014) به کمک رابطه (1) شش جمله اول چند جمله‌ای‌های استرلینگ را به ازای هر $w \in R$ محاسبه کرده‌اند و به صورت زیر ارائه داده‌اند.

$$\psi_0(\omega)=\frac{1}{2},\psi_1(\omega)=\frac{2+2\omega}{24}$$
$$\psi_2(\omega)=\frac{\omega+\omega^2}{48}$$
$$\psi_3(\omega)=\frac{-8-10\omega+15\omega^2+15\omega^3}{5760}$$
$$\psi_4(\omega)=\frac{-6\omega-7\omega^2+2\omega^3+3\omega^4}{11520} \qquad (2)$$
$$\psi_5(\omega)=\frac{96-140\omega-224\omega^2-315\omega^3}{2903040}+\frac{63\omega^5}{2903040}$$

اکنون نحوهٔ محاسبه H_n^mها و $\psi_n(.)$ها در نرم افزار R را ارائه داده‌ایم که در جدول 1 آمده است. در آن $\psi_n(\omega)=psi(\omega,n)$ و منظور از v، $\{H_p^0,H_p^1,\ldots,H_p^{p-1}\}$ و منظور از w، $\{H_{p+1}^0,H_{p+1}^1,\ldots,H_{p+1}^p\}$ است. برای محاسبه $\psi_n(.)$ها در R باید ابتدا گام اول تا گام یازدهم از ستون اول جدول 1 و سپس برنامهٔ موجود در ستون دوم نوشته شود تا برنامه اجرا گردد. بنابراین به راحتی می‌توان با استفاده از این الگوریتم، $\psi_n(.)$ها را محاسبه کرد. مثلاً $\psi_1(1)=psi(1,1)=0.208333$.

جدول 1. الگوریتم نحوهٔ محاسبه H_n^mها و $\psi_n(.)$ها

الگوریتم نحوهٔ محاسبه $\psi_n(.)$ ها	الگوریتم نحوهٔ محاسبه H_n^m ها

psi<- function(x,p)
if(p==0) return(0.5)
p <- p+1
X <- rep(1,p)
for(i in 2:p)
X[i]<--X[i-1]*(x+i)/(p+i)
H <- 1
while(length(H)<p)H<-Stnumbers(H)
psi <- rev(H)*X
psi <- (-1)^ (p-1)*sum(psi)
/factorial(p+1)
	1)Stnumbers<-function(v){
	2)p<- length(v)+1
	3)if(p==2) return(c(3,1))
	4)w <- c(rep(0,p-1),1)
	5)w[1]<-v[1]*(2*p-1)
	6)for(i in 2:length(v)
	7)w[i]<-(2*p-i)*v[i]+(p-i+1)*v[i-1]
	8)return(w)

return(psi) } psi(1,1) 0.2083333 psi(1,2) 0.04166667	9)} 10)v<-c(3,1) 11)Stnumbers(v) 15 10 1 V<-c(15,10,1) Stnumbers(v) 105 105 25 1

اکنون در این بخش به قضیه‌ای مهم اشاره می‌کنیم که نقش مهمی در حل رده‌ای از انتگرال‌ها دارد.

قضیه 1: بازای هر z و δ که $|z|\le 1$ و $\delta\in R$ داریم:

$$\left(-\log(1-z)\right)^{\delta}=\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(\delta)z^{m+\delta}$$

قبل از اثبات قضیه 1 به رابطه‌ای اشاره می‌کنیم که در اثبات این قضیه از آن استفاده می‌کنیم

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}b_i x^i\right)^n=\sum_{i=0}^{\infty}c_{n,i}x^i \qquad (3)$$

که در آن ضرایب $c_{i,j}$ها در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$c_{j,0}=b_0^j,\ c_{j,i}=(i b_0)^{-1}\times\sum_{m=1}^{\infty}(jm-i+m)b_m c_{j,i-m} \quad m\ge 1 \qquad (4)$$

برای اطلاعات بیشتر درباره رابطه (3) و (4) به (گرادشتین و ریزهیک، 2007) رجوع شود. اکنون به اثبات قضیه می‌پردازیم.

اثبات: با توجه به بسط مک لورن $\log(1-z)$ و به کمک قضیه 1 داریم:

$$[-\log(1-z)]^{\delta}=\left[z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}\right]^{\delta}=\sum_{n=0}^{\infty}d_{\delta,n}z^{n+\delta} \qquad (5)$$

که با توجه به رابطه (3)، $b_n = \frac{1}{n+1}$ می‌شود. در نتیجه به کمک رابطه (4) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\delta,0} &= 1, d_{\delta,1} = \frac{\delta}{2}, d_{\delta,2} = \frac{5\delta+3\delta^2}{24} \\ d_{\delta,3} &= \frac{\delta(\delta+2)(\delta+3)}{48} \\ d_{\delta,4} &= \frac{15\delta^4+150\delta^3+485\delta^2}{5760} \\ &\quad + \frac{502\delta}{5760} \end{aligned} \qquad (6)$$

به کمک روابط (5) و (6) داریم:

$$\begin{aligned} \left[-\log(1-z)\right]^{\delta} &= z^{\delta} + \frac{\delta}{2} z^{\delta+1} \\ &\quad + \frac{3\delta^2+5\delta}{24} z^{\delta+2} \\ &\quad + \frac{\delta(\delta+2)(\delta+3)}{48} z^{\delta+3} \\ &\quad + (\frac{15\delta^4+150\delta^3+485\delta^2}{5760} \\ &\quad + \frac{502\delta}{5760}) z^{\delta+4} + \dots \end{aligned} \qquad (7)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\delta) z^{\delta+m} &= z^{\delta} + \delta\psi_0(\delta) z^{\delta+1} \\ &\quad + \delta\psi_1(\delta+1) z^{\delta+2} \\ &\quad + \delta\psi_2(\delta+2) z^{\delta+3} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \qquad (8)$$

با جای‌گذاری $\psi_n(.)$ها از رابطه (2) در رابطه (8) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\delta) z^{\delta+m} &= z^{\delta} + \frac{\delta}{2} z^{\delta+1} \\ &\quad + \frac{3\delta^2+5\delta}{24} z^{\delta+2} \\ &\quad + \frac{\delta(\delta+2)(\delta+3)}{48} z^{\delta+3} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \qquad (9)$$

به همین ترتیب می‌توان برای $m \geq 5$، رابطه

$$d_{\delta,m} = \delta\psi_{m-1}(m+\delta-1)$$

را ثابت کرد. با مشاهده روابط (7) و (9) قضیه ثابت می‌شود.

کاربرد چند جمله‌ای‌های استرلینگ

انتگرال‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$I = \int_0^1 \left(\log(1-u)\right)^{\delta} u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$$

$$I_v = \int_0^v \left(\log(1-u)\right)^{\delta} u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$$

که در آن $0 < v < 1$ است. با توجه به قضیه 1 داریم:

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{\delta} \Big\{ B(\delta+a,b) \\ &\quad + \delta \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(n+\delta) B(n+\delta+a,b) \Big\} \\ I_v &= (-1)^{\delta} \Big\{ B_v(\delta+a,b) \\ &\quad + \delta \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(n+\delta) B_v(n+\delta+a,b) \Big\} \end{aligned}$$

به طوریکه $B(.,.)$، تابع بتا و

$$B_v(a,b) = \int_0^v u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$$

تابع بتای ناقص نام دارند.

در ادامه به ازای مقادیر مشخصی از α، β، δ و v مقادیر I و I_v را به کمک جدول 1 محاسبه کردیم که در جدول 2 آورده شده است.

جدول 2. مقادیر I و I_v به ازای مقادیر متفاوت α، β، δ و v

α	β	δ	I	I_v
0/1	0/5	3	-56/5	$I_{0/25}=-0/0136$
3/5	0/2	-3	447/3	$I_{0/35}=0/1811$
0/7	1/8	1	-0/64	$I_{0/5}=1/1593$
0/8	-0/6	-1	10/5	$I_{0/75}=0/3539$

همچنین با استفاده از رابطه $\log u=\log[1-(1-u)]$ و به کمک قضیه 1 داریم:

$$J=\int_0^1[\log u]^{\delta}u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$$
$$=(-1)^{\delta}\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(\delta)\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\delta+m+\beta-2}du$$
$$=(-1)^{\delta}\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(\delta)B(\alpha,\beta+\delta+m)$$
$$J_v=\int_0^v[\log u]^{\delta}u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$$
$$=(-1)^{\delta}\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(\delta)B_v(\alpha,\beta+\delta+m)$$

اکنون برای نشان دادن توضیح بیشتر، گشتاورهای دو توزیع آماری را به کمک چندجمله‌ای‌های استرلینگ به دست می‌آوریم:

مثال 1. توزیع بتا وایبول هندسی (یعقوب‌زاده و همکاران، 1394) را که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است در نظر می‌گیریم:

$$f(x;\alpha,\beta,\theta,a,b)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}(1-\theta)^{b}x^{\alpha-1}}{B(a,b)e^{b(\beta x)^{\alpha}}}\times\frac{\left(1-e^{-(\beta x)^{\alpha}}\right)^{a-1}}{\left(1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}\right)}$$

که در آن $\alpha,\beta,a,b>0$ و $0<\theta<1$ است. گشتاور مرکزی مرتبه rام آن به کمک تغییر متغیر

$$u=\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}}$$

برابر است با:

$$E(X^r)=\frac{1}{B(a,b)}\times\int_0^1\left\{\left[\log\left(1-\frac{(\theta-1)u}{1-u}\right)\right]^{\frac{r}{\alpha}}\times u^{a-1}(1-u)^{b-1}\right\}du$$

با کاربرد قضیه 1 برای $\left[\log\left(1-\frac{(\theta-1)u}{1-u}\right)\right]^{\frac{r}{\alpha}}$ رابطهٔ قبل یعنی $E(X^r)$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$E(X^r)=\frac{(-1)^{\frac{r}{\alpha}}(1-\theta)^{m+\frac{r}{\alpha}}}{\beta^{r}B(a,b)}\times\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m\left(\frac{r}{\alpha}\right)B\left(a+m+\frac{r}{\alpha},b-m-\frac{r}{\alpha}\right)$$

مثال 2. توزیع گاما وایبول نمایی (پینو و مکاران، 2012) را که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است در نظر می‌گیریم:

$$f(x;\alpha,\lambda,\delta,k)=\frac{k\alpha^{\delta}x^{k-1}}{\lambda^{k}\Gamma(\delta)}e^{-(\frac{x}{\lambda})^{k}}$$
$$\times(1-e^{-(\frac{x}{\lambda})^{k}})^{\alpha-1}$$
$$\times\left\{-\log\left[1-e^{-(\frac{x}{\lambda})^{k}}\right]\right\}^{\delta-1}$$

با به کار بردن قضیه 1 برای $\left\{-\log\left[1-e^{-(\frac{x}{\lambda})^{k}}\right]\right\}^{\delta-1}$ و به کمک تغییر متغیر $u=1-e^{-(\frac{x}{\lambda})^{k}}$، گشتاور مرکزی مرتبه r ام برابر است با:

$$E(X^{r})=\frac{\lambda^{r}\alpha^{\delta}}{\Gamma(\delta)}$$
$$\times\int_{0}^{1}[-\log(1-u)]^{\frac{r}{k}}u^{\delta-1}(1-u)^{\delta+m}du$$

با کاربرد با کاربرد قضیه 1 برای $[-\log(1-u)]^{\frac{r}{k}}$ داریم:

$$E(X^{r})=\frac{\lambda^{r}\alpha^{\delta}}{\Gamma(\delta)}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\rho_{m}(\frac{r}{k})B(\delta+\frac{r}{k},m+\frac{r}{k}+1)$$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله چند جمله‌ای‌های استرلینگ معرفی و کاربردهایی از آن در حل رده‌ای از انتگرال‌ها و گشتاورهای توزیع‌های آماری ارائه شد و به وسیلهٔ دو توزیع آماری کاربرد چند جمله‌ای‌های استرلینگ در محاسبه گشتاورها نشان داده شد.

منابع

یعقوب‌زاده، ش.، شادرخ، ع. و یارمحمدی، م. (1394)، چند جمله‌ای‌های استرلینگ و یک تعمیم جدید از توزیع وایبول هندسی، مجلهٔ علوم آماری، 9 (1)، 141-119.

Castellares, F. and Lemonte, A.J. (2014). A new generalized Weibull distribution generated by gamma random variabales, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 32 (2), 382-390.

Gradshttyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2007). Table of Integrals, Series, and Products. 7 end, Academic Press, New York.

Nadarajah, S., Cordeiro, G.M. and Ortega, E.M.M. (2015). The Zografos- Balakrishnan-G Family of distributions: Mathematical Properties and Applications, Communications in Statistics-Theory and Methods, 44, 186- 215.

Pinho, L.G.B., Cordeiro, G.M. and Nobre, I.S. (2012). The Gamma Exponentiated Weibull distribution, Journal of Statistical Theory and Applications, 11(4), 379-395.

Ward, M. (1934). The representation of Stirling's Polynomials as sums of factorial, American Journal of Mathematical, 56, 87-95.