Statistical Sciences Extension
Vol. 1, No. 2, Spring-Summer 2016, (P 15-30)

گسترهٔ علوم آماری
سال اول - شماره دوم، بهار و تابستان 1395، (ص 15-30)

قضیهٔ باسو در آزمون فرضیه‌های آماری

مهدی شمس *
استادیار، آمار، دانشگاه کاشان

تاریخ دریافت: 1394/10/14 **تاریخ پذیرش**: 1395/06/02

Basu's Theorem in Statistical Testing Hypotheses

M. Shams*
Assistant Professor, Statistics, University of Kashan

Received: 2016/01/04 **Accepted:** 2016/08/23

Abstract

In some statistical problems we need independence of two statistic,especially in testing hypotheses. With Basu's theorem, we can proof independence of two statistic without calculate their joint ditributions. In this paper we will give applications of this theorem in statistical testing hypotheses as GLRT, UMPUT, compound tests, and testing of econometric models. Finally we briefly express simulation study for testing hypotheses.

Keywords

Basu's Theorem, Distribution of GLRT, UMPUT, Compound Tests.

چکیده

در برخی مسائل آماری از جمله آزمون فرضیه‌ها نیاز به وجود اثبات استقلال دو آمارهٔ کمکی و آمارهٔ بسنده کامل داریم. با استفاده از قضیهٔ باسو بدون این که توزیع توأم دو آماره محاسبه شوند، با داشتن شرایط لازم وجود این استقلال ثابت می‌شود. در این مقاله به بیان کاربردهایی از این قضیه در آزمون فرضیه‌های آماری می‌پردازیم. پیدا کردن توزیع نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته و پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت نااریب، استقلال نسبت‌های درست‌نمایی برای آزمون‌های مرکب و آزمون‌های مدل‌های اقتصادسنجی می‌تواند چند مورد از کاربردهای این قضیه باشد. در پایان به طور مختصر شبیه‌سازی آزمون فرضیه‌ها بیان می‌گردد.

واژگان کلیدی

قضیهٔ باسو، توزیع نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته، پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت نااریب، آزمون‌های مرکب.

*Corresponding Author: mehdi_shams1357@yahoo.com

*** نویسنده مسئول**: مهدی شمس

مقدمه

قضیهٔ باسو[1] (باسو، 1955) یکی از قضیه‌های مشهور آمار و هستهٔ اصلی استنباط آمار کلاسیک را تشکیل می‌دهد که در سال 1955 باسو آن را اثبات کرد و با این که سال‌ها از اثبات آن می‌گذرد، هنوز از کاربردهای آن در شاخه‌های مختلف آمار استفاده می‌شود. این قضیه باعث کشف ارتباط بین بسندگی، آماره‌های کمکی و استقلال می‌شود که البته قبل از آن چنین ارتباطی تصور نمی‌شد. با استفاده از این قضیه بدون این که توزیع توأم دو آمارهٔ کمکی و آمارهٔ بسنده کامل محاسبه شوند، با داشتن شرایط لازم وجود استقلال این دو آماره ثابت می‌شود. ما در این مقاله چند کاربرد از این قضیه در آزمون فرضیه‌های آماری می‌پردازیم. به عنوان نمونه در پیدا کردن توزیع نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته و پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت نااریب، آزمون‌های مرکب و آزمون‌های مدل‌های اقتصادسنجی این قضیه می‌تواند کارساز و راه‌گشا باشد. جایگاه قضیهٔ باسو در برخی از این موارد به خصوص در محاسبه پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت نااریب با پارامترهای مزاحم به این صورت است که امید ریاضی مشروط به آمارهٔ بسندهٔ کامل تحت فرضیه صفر با اعمال یک سری عملیات جبری به صورت امید ریاضی یک آمارهٔ کمکی مشروط به آمارهٔ بسندهٔ کامل تحت فرضیه صفر در می‌آید و لذا با استفاده از قضیهٔ باسو امید شرطی به امید غیرشرطی تبدیل می‌شود که محاسبات را ساده‌تر می‌کند. همچنین در مواردی که برآوردگر حداکثر درست‌نمایی یک آمارهٔ بسندهٔ کامل باشد، طبق قضیهٔ باسو آمارهٔ نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته که کمکی است از مخرج آن مستقل بوده و در پی آن با استفاده از فرمول اساسی گشتاور نسبت‌ها که در ذیل به آن اشاره می‌کنیم، با محاسبه راحت‌تر گشتاورها می‌توان توزیع آمارهٔ نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته را مشخص کرد. در این مقاله استقلال دو متغیر تصادفی X و Y را با نماد $X \perp Y$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ 1: (فرمول اساسی گشتاور نسبت‌ها): هرگاه برای متغیرهای تصادفی X و $Y \neq 0$ داشته باشیم $X/Y \perp Y$، آن‌گاه برای هر $k \in N$:

$$E\left(X/Y\right)^k = EX^k / EY^k.$$

اثبات: برای هر $k \in N$ از این که $(X/Y)^k \perp Y^k$ داریم:

$$EX^k = E\left(\left(\frac{X}{Y}\right)^k Y^k\right) = E\left(\frac{X}{Y}\right)^k EY^k.$$

در مواردی که Y تابعی از آمارهٔ بسندهٔ کامل و X/Y آمارهٔ کمکی است با استفاده از قضیهٔ باسو استقلال X/Y و Y نتیجه شده و پس از آن با کمک قضیهٔ بالا گشتاورهای توزیع X/Y به دست می‌آیند.

مثال 1: در یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ $2 \le n$، از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ با میانگین و واریانس نمونهٔ $\bar{X}$ و $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$، بر اساس اصطلاح به کار رفته در دانشنامهٔ کاتس و جانسون (دیوید، 1988) آماره‌های استیودنتیده[2] به صورت $U=\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}/S$ تعریف می‌شوند که در آن a_iها ثابت اند. در حالت خاص $a_1=-1$، $a_2=0$، ...، $a_{n-1}=0$ و $a_n=1$، آمارهٔ استیودنتیده را دامنهٔ تغییرات استیودنتیده نامند که برابر است با $Q=(X_{(n)}-X_{(1)})/S$. دلیل این نام گذاری این است که برای از بین بردن وابستگی توزیع دامنهٔ تغییرات نمونه[3] $W=X_{(n)}-X_{(1)}$ به پارامتر نامعلوم σ^2، می‌توانیم W را به صورت $Q=W/S$ استیودنتیده کنیم که در این صورت Q به پارامتر مجهول σ^2 بستگی ندارد. برای محاسبهٔ گشتاورهای Q، ابتدا متغیرهای تصادفی $X_n,\dots,X_1$ را استاندارد می‌کنیم. برای این منظور با تبدیل $Z_i=(X_i-\mu)/\sigma$، Z_iها دارای توزیع نرمال استاندارد می‌شوند. به سادگی می‌توان نشان داد:

1. Basu’s Theorem

2. Studentized

3. Sample Range

$$U=\sum_{i=1}^{n} b_i X_i / S$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i \frac{X_i-\mu}{\sigma}+b_i\frac{\mu}{\sigma}\right)}{S/\sigma}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i Z_i+\frac{\mu}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i-\bar{Z}\right)^2}}$$

که $(b_1,\ldots,b_n)$ جایگشت دلخواهی از $(a_1,\ldots,a_n)$ است و $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} b_i$؛ بنابراین U کمکی است، اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i=0$. از طرف دیگر $(\bar{X},S^2)$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای (μ,σ^2) است؛ پس با به کارگیری قضیهٔ باسو می‌توان نتیجه گرفت که $U \perp S$ اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i=0$ (رید، 1988)؛ بنابراین با توجه به فرمول اساسی گشتاور نسبت‌ها (قضیهٔ 1) برای هر $k \in N$ داریم:

$$E(U^k)=E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}\right)^k / E(S^k)$$

که در آن $\sum_{i=1}^{n} a_i=0$. در حالت خاص که $a_1=-1$، $a_2=0$، ...، $a_{n-1}=0$ و $a_n=1$، داریم $Q \perp S$ و لذا برای هر $k \in N$:

$$E(Q^k)=\frac{E\left(W/\sigma\right)^k}{(n-1)^{-\frac{k}{2}}E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{k}{2}}}$$
$$=\frac{\left[\frac{n-1}{2}\right]^{k/2}E\left(W/\sigma\right)^k}{\int_0^\infty \frac{t^{k/2}t^{(n-3)/2}e^{-t/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{(n-1)/2}2^{k/2}}dt}$$
$$=\frac{\left[\frac{n-1}{2}\right]^{k/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-1}{2}\right)}E\left(W/\sigma\right)^k.$$

محاسبهٔ مستقیم $E(Q^k)$ مشکل است، اما با استفاده از نتیجهٔ فوق این کمیت با پیدا کردن گشتاور دامنهٔ نمونه $E(W^k)$ و گشتاور انحراف استاندارد نمونه $E(S^k)$ به راحتی محاسبه می‌شود. به طور مشابه با اختیار $V=(X_1-\bar{X})/S$ می‌توانیم گشتاورهای V را محاسبه کنیم:

$$E(V^K)=\frac{E(X_1-\bar{X})^k}{E(S^k)}$$
$$=\left[\frac{n-1}{2}\right]^k\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-1}{2}\right)}E\left((X_1-\bar{X})/\sigma\right)^k.$$

ولی چون $Y=X_1-\bar{X}$ دارای توزیع $N(0,(n-1)/n)$ است،

$$E(Y^K)=\frac{d^k}{dt^k}M_Y(t)\Big|_{t=0}=\frac{d^k}{dt^k}e^{\frac{1}{2}(n-1)t^2/n}\Big|_{t=0}$$

و بنابراین $E(V^k)$ قابل محاسبه خواهد بود (دیوید، 1981). همچنین می‌توان W را از روی S پیش بینی کرد. این بار هم استقلال $Q=W/S$ و S و در پی آن فرمول اساسی گشتاور نسبت‌ها (قضیهٔ 1) نتیجه می‌دهد:

$$E(Q^k)=E(W/S)^k=E(W^k)/E(S^k).$$

بنابراین رگرسیون W روی S خطی خواهد بود:

$$E[W|S=s]=E(QS|S=s)$$
$$=sE(Q)$$
$$=\left(E(W)/E(S)\right)s.$$

همچنین:

$$\mathrm{Var}\left[W|S=s\right]$$
$$=s^2\left(\frac{E(W^2)}{E(S^2)}-\left(\frac{E(W)}{E(S)}\right)^2\right)\propto s^2.$$

ضریب همبستگی بین S و W برابر است با

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Corr}(W,S)\\
&=\frac{\mathrm{Cov}(W,S)}{\sqrt{\mathrm{Var}W}\sqrt{\mathrm{Var}S}}\\
&=\frac{E(QS^2)-E(W)E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}W}\sqrt{\mathrm{Var}S}}\\
&=\frac{E(Q)E(S^2)-E(W)E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}W}\sqrt{\mathrm{Var}S}}\\
&=\frac{E(W)}{E(S)}\frac{\left[E(S^2)-E^2(S)\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}W}\sqrt{\mathrm{Var}S}}\\
&=\frac{E(W)}{E(S)}\sqrt{\frac{\mathrm{Var}S}{\mathrm{Var}W}}\\
&=\sqrt{\mathrm{Var}\left[\frac{S}{E(S)}\right]\left\{\mathrm{Var}\left[\frac{W}{E(W)}\right]\right\}^{-1}}\\
&=\sqrt{e\left(W/E(W),S/E(S)\right)}
\end{aligned}$$

به طوری که

$$0\le e(V,U)=\mathrm{Var}_\theta(U)/\mathrm{Var}_\theta(V)$$

کارایی V نسبت به U است.

مثال 2: اگر $\mathbf{S_1}$ و $\mathbf{S_2}$ دو متغیر تصادفی ویشارت[1] p بعدی مستقل با پارامتر مقیاس مشترک Σ و درجه آزادی‌های m_1 و m_2 باشند به طوری که $\max(m_1,m_2)\ge p$ (بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $m_1\ge m_2$). آمارۀ Λ-ویلکز[2] را به صورت $\Lambda=|\mathbf{S_1}|/|\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2}|$ تعریف می‌کنیم؛ بنابراین:

$$\begin{aligned}
\Lambda&=\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\right|\left|\mathbf{S_1}\right|\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\right|/\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\right|\left|\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2}\right|\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\right|\\
&=\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{S_1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\right|/\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2})\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\right|.
\end{aligned}$$

حال اگر $\mathbf{S_1}=\sum_{i=1}^{m_1}\mathbf{Y_i}\mathbf{Y_i^T}$ و $\mathbf{S_2}=\sum_{j=1}^{m_2}\mathbf{Z_j}\mathbf{Z_j^T}$ به طوری که $\mathbf{Y_i}$ها و $\mathbf{Z_i}$ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع $N_p(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma})$ باشند، آن گاه توزیع Λ به $\boldsymbol{\Sigma}$ بستگی ندارد، یعنی Λ یک آمارۀ کمکی است. همچنین داریم $\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2}$ آمارۀ بسندۀ کامل برای $\boldsymbol{\Sigma}$ است، لذا طبق قضیۀ باسو Λ از $\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2}$ و در نتیجه هر تابع از آن به ویژه از $|\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2}|$ مستقل است. بنابراین با توجه به فرمول اساسی گشتاور نسبت‌ها (قضیۀ 1) برای هر $k\in N$، $E\Lambda^k=E|\mathbf{S}_1|^k/E|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|^k$. با توجه به این که توزیع Λ به $\boldsymbol{\Sigma}$ بستگی ندارد، گشتاورهای طرف راست تساوی فوق را تحت $\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{I_p}$ محاسبه می‌کنیم. تحت این فرض $|\mathbf{S_1}|$ هم توزیع با $\prod_{i=1}^{p}W_{i,1}$ است که $W_{i,1}$ها مستقل و با توزیع $\chi^2_{m_1-i+1}$ هستند. به طور مشابه $|\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2}|$ هم توزیع با $\prod_{i=1}^{p}W_{i,2}$ است که $W_{i,2}$ها مستقل و با توزیع $\chi^2_{m_1+m_2-i+1}$ هستند. از طرف دیگر می‌دانیم که اگر U و V دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع‌های χ^2_n و χ^2_m باشند $U/(U+V)$ دارای توزیع $\mathrm{Beta}(n,m)$ خواهد بود؛ بنابراین $E\Lambda^K$ برای هر $k\in N$ برابر kامین گشتاور حاصل ضرب p متغیر تصادفی مستقل بتا خواهد بود. این مطلب منجر به این نتیجه می‌شود که Λ هم توزیع با حاصل ضرب p متغیر تصادفی بتای مستقل است (گوش، 2002).

اکنون به بیان کاربردهایی از قضیۀ باسو در آزمون فرضیه‌های آماری می‌پردازیم. در بخش‌های بعدی به تفضیل کاربردهایی از این قضیۀ در پیدا کردن توزیع نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته و پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت نااریب، آزمون‌های مرکب و آزمون‌های مدل‌های اقتصادسنجی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در پایان شبیه‌سازی آزمون فرضیه‌های معرفی می‌شود.

مثال 3: فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_m$ و $Y_1,\dots,Y_n$ به ترتیب دو نمونۀ تصادفی مستقل از توزیع $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ و $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ باشند. آزمون $H_0:\mu_1=\mu_2$ را وقتی هیچ فرضی مبنی براین که $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ باشد نداریم، مسألۀ بهرنس-فیشر[3] گویند. راه‌های متعددی برای حل این مسئله پیشنهاد شده است. یکی از این روش‌ها، حل ولش[4]

1. Wishart
2. Wilk's Λ -Statistic

3. Behrens-Fisher problem
4. Welch's solution

است. در این روش آمارهٔ زیر که دارای توزیع t-استیودنت با درجهٔ آزادی $f = m + n - 2$ است را در نظر می‌گیریم:

$$T_w = (\bar{X} - \bar{Y}) / \sqrt{S_1^2 / m + S_2^2 / n}.$$

وانگ (1971) چگونگی محاسبه احتمال خطای نوع اول برای روش ولش را بررسی کرد، به این صورت که با اختیار $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ برای تابعی مثل h داریم:

$$P(T_w \geq t_{\alpha,f}) = P\left(T(\rho) \geq h(\alpha, m, n, S_1^2/S_2^2)\right)$$

و نیز:

$$T(\rho) = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{m} + \frac{\rho}{n}\right)\left[(m-1)S_1^2 + \frac{(n-1)S_2^2}{\rho}\right]}{m+n-2}}}.$$

برای محاسبهٔ احتمال بالا از این که $T(\rho)$ دارای توزیع t-استیودنت با $m+n-2$ درجه آزادی و در نتیجه مستقل از S_1^2/S_2^2 است، استفاده می‌کنیم. استقلال $T(\rho)$ و S_1^2/S_2^2 باز هم با استفاده از قضیهٔ باسو نتیجه می‌شود، زیرا اگر ρ معلوم فرض شود S_1^2/S_2^2 یک آمارهٔ کمکی است و لذا از آمارهٔ بسندهٔ کامل $T = (\bar{X}, \bar{Y}, (m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2/\rho)$ و بنابراین از هر تابع T به ویژه $T(\rho)$ مستقل است. فرض معلوم بودن ρ هیچ تأثیری روی توزیع توأم $T(\rho)$ و S_1^2/S_2^2 ندارد و لذا نتیجه برای حالتی که ρ نامعلوم است، نیز برقرار است (بوس و هاگز، 1998).

مثال 4: فرض می‌کنیم $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$$

باشد، که در آن

$$Q = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho) : \mu_1, \mu_2 \in R, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in R^+, \rho \in (-1,1)\}$$

و $\mathbf{X_i} = (X_{1i}, X_{2i})^T$، $(i = 1,..,n)$.

می‌خواهیم استقلال آمارهٔ $T = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2)$ و ضریب همبستگی نمونه ای

$$R = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2) / S_1 S_2$$

را تحت فرضیه $H_0 : \rho = 0$ نشان دهیم که در آن

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ji}$$
$$S_j^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_{ji} - \bar{X}_j)^2; \quad j = 1,2.$$

اگر فرض کنیم $\rho = 0$، با توجه به قضیهٔ باسو آمارهٔ بسندهٔ کامل T برای $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ از آمارهٔ کمکی R مستقل است. اکنون با توجه به این نتیجه و همچنین استقلال توأم $S_2^2, S_1^2, \bar{X}_2, \bar{X}_1$ می‌توانیم استقلال توأم $S_2^2, S_1^2, \bar{X}_2, \bar{X}_1$ و R را تحت فرضیه H_0 نتیجه بگیریم؛ بنابراین تابع چگالی توأم این پنج آماره به صورت حاصل ضرب تابع چگالی‌های حاشیه‌ای آن‌ها نوشته می‌شود. اکنون با توجه به قضیهٔ دسته‌بندی نیمن[1] نتیجه می‌گیریم که تابع چگالی توأم این پنج آماره برای هر $\rho \in (-1,1)$ دلخواه به صورت زیر تجزیه می‌شود (مادو، 1938):

$$q_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2, r)$$
$$= q_{0,0,1,1,0}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2, r)\frac{L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)}{L(0,0,1,1,0)}$$

که در آن $L(.)$ تابع درست‌نمایی تحت مقادیر مشخص شده است (هاگ و کرایگ، 1938).

1. Neyman’s Factorization Theorem

پیدا کردن توزیع نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته

روش آزمون نسبت درست‌نمایی یکی از قدیم‌ترین و مفیدترین روش‌ها در نظریۀ آزمون فرضیه‌هاست که در سال 1928 نیمن و پیرسن آن را مطرح کردند. نقشی که این روش در نظریه آزمون فرضیه‌ها داراست، همانند نقش روش ماکزیمم درست‌نمایی در نظر برآوردهاست. اساس این روش در حالت تعمیم یافته به این صورت است که اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونۀ تصادفی از توزیعی با پارامتر $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$ باشد که در آن $\{\Theta_0,\Theta_1\}$ یک افراز از Θ است، در این صورت برای آزمون فرضیه $H_0:\theta\in\Theta_0$ در مقابل $H_1:\theta\in\Theta_1$ روش آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته[1] (GLRT) ناحیۀ رد زیر را پیشنهاد می‌کند:

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{\sup_{\Theta_0}L(\theta)}{\sup_{\Theta}L(\theta)}=\frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})}<\lambda_0$$

که $\hat{\theta}_0$ و $\hat{\theta}$ به ترتیب MLE برای θ تحت فرضیه H_0 و $H_0\cup H_1$ هستند و $\lambda_0\in[0,1]$ عددی ثابت است. حال اگر $\hat{\theta}$ یک آمارۀ بسندۀ کامل باشد، از آمارۀ نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته یعنی $\lambda\equiv\lambda(\mathbf{X})$ که یک آمارۀ کمکی است مستقل خواهد بود (قضیۀ باسو) و در پی آن به کمک فرمول اساسی گشتاور نسبت‌ها (قضیۀ 1) به راحتی توزیع آمارۀ نسبت درست‌نمایی مشخص می‌شود.

مثال 5: فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_n$ یک نمونۀ تصادفی از توزیع $U(\mu-\theta,\mu+\theta)$ باشد. تابع درست‌نمایی این نمونۀ تصادفی به صورت $L(\theta,\mu)=(2\theta)^{-n}u(\mu+\theta-x_{(n)})u(x_{(1)}-\mu+\theta)$ می‌باشد؛ بنابراین آمارۀ آزمون نسبت درست‌نمایی برای آزمون $H_0:\mu=0$ برابر است با:

$$\lambda(\mathbf{X})=\frac{L(Z,0)}{L((X_{(n)}-X_{(1)})/2,2X_{(1)})}=\left[\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{2Z}\right]^n$$

که در آن $Z=\max(-X_{(1)},X_{(n)})$ آمارۀ بسنده برای پارامتر θ است. با توجه به این که تحت فرضیه H_0 توزیع $\lambda(\mathbf{X})$ به پارامتر θ بستگی ندارد، به کمک قضیۀ باسو Z و $\lambda(\mathbf{X})$ مستقل‌اند؛ بنابراین با به کارگیری فرمول گشتاور نسبت‌ها (قضیۀ 1) داریم:

$$E\left[\exp\{it(-2\ln\lambda(\mathbf{X}))\}\right]=\frac{E\left[\exp\left\{it\left[-2\ln(X_{(n)}-X_{(1)})^n\right]\right\}\right]}{E\left[\exp\left\{it\left[-2\ln(2Z)^n\right]\right\}\right]}.$$

برای $\theta=1/2$ اگر از طرفین تساوی بالا وقتی $n\to\infty$ حد بگیریم به سادگی دیده می‌شود که $-2\ln\lambda(\mathbf{X})$ به توزیع χ^2_2 میل می‌کند (هاگ و کرایگ، 1938).

مثال 6: فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_n$ و $Y_1,\dots,Y_m$ به ترتیب دو نمونۀ تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت $U(\theta-1,\theta+1)$ و $U(\theta'-1,\theta'+1)$ باشند که همه پارامترها نامعلوم‌اند. برای آزمون تساوی میانگین‌ها یعنی $H_0:\theta=\theta'$، آمارۀ آزمون نسبت درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\frac{\max(X_{(n)}-X_{(1)},Y_{(m)}-Y_{(1)})}{\max(X_{(n)},Y_{(m)})-\min(X_{(1)},Y_{(1)})}.$$

اگر قرار دهیم $Z_1=\min(X_{(1)},Y_{(1)})$ و $Z_2=\max(X_{(n)},Y_{(m)})$، آن گاه تحت فرضیه H_0، (Z_1,Z_2) آمارۀ بسندۀ توأم برای (θ_1,θ_2) است. از طرف دیگر $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ به این پارامترها بستگی ندارد و لذا $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})\perp(Z_1,Z_2)$ و در نتیجه $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})\perp Z_2-Z_1$؛ بنابراین با به کارگیری فرمول گشتاور نسبت‌ها (قضیۀ 1)، گشتاورهای $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ مساوی نسبت گشتاورهای صورت کسر به گشتاورهای مخرج کسر هستند (هاگ، 1953).

مثال 7: فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_n$ و $Y_1,\dots,Y_m$ دو نمونۀ تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی زیر باشند:

1. Generalized Likelihood Ratio Test

$$f_{\theta_1,\theta_2}(x)=\theta_2^{-1}\exp\left(-(x-\theta_1)/\theta_2\right)\quad ;\theta_1<x$$

و قرار دهیم $Z_1=\min(X_{(1)},Y_{(1)})$ و $Z_2=\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}+\sum_{i=1}^{m}Y_{(i)}$، آن گاه (Z_1,Z_2) آمارهٔ بسندهٔ کامل برای (θ_1,θ_2) است و بنابراین:

$$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-X_{(1)})+\sum_{i=1}^{m}(Y_{(i)}-Y_{(1)})}{Z_2-(n+m)Z_1}\right]^{n+m}$$

که توزیع آن به θ_1 و θ_2 بستگی ندارد از (Z_1,Z_2) مستقل است و لذا $Z_2-(n+m)Z_1$ از $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ مستقل است؛ بنابراین گشتاورهای $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ با تقسیم گشتاورهای صورت به مخرج به دست می‌آیند (پالسون، 1941).

در مثال‌های بالا دیدیم که قضیهٔ باسو چگونه در پیدا کردن توزیع $-2\ln\lambda$ تحت فرضیه H_0 به کار می‌رود. حالت عمومی در توزیع‌هایی که تکیه‌گاه آنها به پارامتر مجهول بستگی دارد، به صورت زیر مطرح می‌شود:

قضیه 2: فرض کنید X_{ij} ها که در آن $i=1,\dots,k$ و $j=1,\dots,n_i$ $(k\geq 2)$ دو به دو مستقل باشند و همچنین X_{ij} ها که در آن $j=1,\dots,n_i$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال عمومی زیر باشند:

$$f_{\theta_i}(x_i)=\frac{h(x_i)}{H(\theta_i)}I_{[0,\theta_i]}(x_i)\ ;\ i=1,\dots,k$$

به طوری که $H(u)=\int_0^u h(x)dx$ وقتی که برای هر $x>0$، $h(x)>0$. اگر $\lambda(\mathbf{X})$ آمارهٔ GLRT برای آزمون:

$H_0:\theta_1=\dots=\theta_k$

$H_1:$ همهٔ θ_iها مساوی نیستند

باشد، آن‌گاه تحت فرضیه H_0، $-2\ln\lambda(\mathbf{X})$ دارای توزیع χ^2_{2k-2} می‌باشد(گوش، 2002).

اثبات: قرار می‌دهیم $Q_0=\{(\theta,\dots,\theta);\theta\geq 0\}$ و

$$\mathbf{X_i}=\left(X_{i1},\dots,X_{in_i}\right)^T$$
$$T_i\equiv T_i(\mathbf{X_i})=\max\left(X_{i1},\dots,X_{in_i}\right);\ i=1,\dots,k$$
$$\mathbf{X}=\left(\mathbf{X_1^T},\dots,\mathbf{X_k^T}\right)^T$$
$$T=\max(T_1,\dots,T_k).$$

T_iها MLE برای θ_iها هستند و T، MLE عمومی θ_iها $(\theta_1=\dots=\theta_k=\theta)$ تحت فرضیه H_0 است؛ بنابراین آمارهٔ GLRT برای آزمون بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{X})&=\frac{L(T,\dots,T)}{L(T_1,\dots,T_k)}\\&=\frac{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}h(X_{ij})/H(T)}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}h(X_{ij})/H(T_i)}\\&=\prod_{i=1}^{k}\frac{(H(T_i))^{n_i}}{(H(T))^{n_i}}=\frac{\prod_{i=1}^{k}H^{n_i}(T_i)}{H^{n}(T)}\end{aligned}$$

که در آن $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$. بنابراین:

$$\begin{aligned}-2\ln\lambda(\mathbf{X})&=-\sum_{i=1}^{k}\ln H^{n_i}(T_i)+2\ln H^{n}(T)\\&+2\ln H^{n}(\theta)-2\ln H^{n}(\theta)\\&=\sum_{i=1}^{k}\ln H^{n_i}(T_i)+2n\ln H(\theta)+\frac{2\ln H^{n}(T)}{H^{n}(\theta)}\\&=\left[-2\sum_{i=1}^{k}\ln\frac{H^{n_i}(T_i)}{H^{n_i}(\theta)}\right]-\left[-2\ln\frac{H^{n}(T)}{H^{n}(\theta)}\right].\end{aligned}$$

برای هر $i=1,\dots,k$ و $0\leq t_i\leq\theta_i$ داریم:

$$\begin{aligned}F_{T_i}(t_i)&=\left[P\left(X_{i1}\leq t_i\right)\right]^{n_i}\\&=\left(\int_0^{t_i}\frac{h(x_i)}{H(\theta_i)}dx_i\right)^{n_i}=\frac{H^{n_i}(t_i)}{H^{n_i}(\theta_i)}.\end{aligned}$$

می‌دانیم که $F_{T_i}(T_i)$ دارای توزیع $U(0,1)$ است؛ بنابراین $H^{n_i}(T_i)/H^{n_i}(\theta_i)$ نیز چنین است و با توجه به این که T_iها از هم مستقل‌اند (چون تابعی از X_{ij} ها هستند) لذا تحت فرضیه H_0 برای هر i،

$H^{n_i}(T_i)/H^{n_i}(\theta)$ ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع $U(0,1)$ هستند و $-2\ln\left(H^{n_i}(T_i)/H^{n_i}(\theta_i)\right)$ دارای توزیع χ^2_2 است و به دلیل استقلال متغیرهای تصادفی بالا $W_1=\sum_{i=1}^{k}-2\ln\left(H^{n_i}(T_i)/H^{n_i}(\theta_i)\right)$ دارای توزیع χ^2_{2k} است. به طور مشابه تحت فرضیه H_0، تابع توزیع T به صورت $H^n(t)/H^n(\theta)$ خواهد شد و بنابراین تحت فرضیه H_0 ، $H^n(T)/H^n(\theta)$ دارای توزیع $U(0,1)$ و در نتیجه $W_2=-2\ln\left(H^n(T)/H^n(\theta)\right)$ دارای توزیع χ^2_2 است. از طرف دیگر تحت فرضیه H_0، T آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است و $\lambda(\mathbf{X})$ یک آمارهٔ کمکی است؛ بنابراین با توجه به قضیهٔ باسو و این حقیقت که W_2 تابعی از T است، داریم $-2\ln\lambda(\mathbf{X})\perp T$ و لذا $-2\ln\lambda(\mathbf{X})\perp W_2$.

در نتیجه داریم $W_1=-2\ln\lambda(\mathbf{X})+W_2$ که این رابطه به همراه این که W_1 و W_2 به ترتیب دارای توزیع χ^2_{2k} و χ^2_2 هستند و با استفاده از قضیهٔ کاکران[1] (سرل، 1971)، تحت فرضیه H_0، $-2\ln\lambda(\mathbf{X})$ دارای توزیع χ^2_{2k-2} است.

مثال 8: فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_n$ $(n\geq 2)$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع نمایی منفی با تابع چگالی $f_{\theta_i}(x)=\exp(-(x-\theta_i))I_{(\theta_i,\infty)}(x)$ باشد که برای آزمون قضیه 1 مشابه مثال قبل می‌توان نتیجه گرفت که $-2\ln\lambda(\mathbf{X})$ تحت فرضیه H_0 دارای توزیع χ^2_{2n-2} است که در آن $\lambda(\mathbf{X})=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})\right)$.

استقلال نسبت‌های درست‌نمایی برای آزمون‌های مرکب[2]

هاگ (1961) بر روی آزمون‌های مرکب بر اساس آماره‌های دو به دو مستقل، تحقیقاتی انجام داد که فرمول‌بندی عمومی وی به شرح زیر است:

فرض می‌کنیم $\Theta=\Theta_1$ فضای پارامتر θ باشد به طوری که θ یک عدد حقیقی و یا یک بردار است. می‌خواهیم آزمون $H_0:\theta\in\Theta_*$ در مقابل $H_1:\theta\in\Theta_1-\Theta_*$ را انجام دهیم که در آن $\emptyset\neq\Theta_*\subset\Theta_1$. فرض کنیم یک دنبالهٔ تو در تو از زیر مجموعه‌های فضای پارامتر به صورت $\Theta_1\supset\dots\supset\Theta_k=\Theta_*$ وجود داشته باشد و بخواهیم یک دنباله از فرضیه‌های $H_0^i:\theta\in\Theta_i$ در مقابل $H_1^i:\theta\in\Theta_{i-1}-\Theta_i$ که $i=2,\dots,k$ را آزمون کنیم. به وضوح اگر H_0^i پذیرفته شود، آن گاه H_0^{i-1} نیز پذیرفته می‌شود. (زیرا اگر H_0^i پذیرفته شود یعنی $\theta\in\Theta_i$ باشد چون دنبالهٔ $\{\Theta_i\}_{i=2}^{k}$ نزولی است پس $\theta\in\Theta_{i-1}$ خواهد بود و لذا H_0^{i-1} نیز پذیرفته می‌شود.) به علاوه به دلیل این که

$$H_0\equiv\bigcap_{i=2}^{K}H_0^i \qquad (1)$$

می‌توانیم بگوییم H_0 پذیرفته می‌شود، اگر و تنها اگر همه $H_0^2,\dots,H_0^K$ ها پذیرفته شوند. اگر λ_i آمارهٔ GLRT برای آزمون فرضیه $H_0^i:\theta\in\Theta_i$ در مقابل $H_1^i:\theta\in\Theta_{i-1}-\Theta_i$ که $i=2,\dots,k$ و λ آمارهٔ GLRT برای آزمون H_0 در برابر H_1 باشد، آن گاه:

$$\lambda=\frac{\sup_{\Theta_*}L(\theta)}{\sup_{\Theta_1}L(\theta)}=\prod_{i=2}^{k}\frac{\sup_{\Theta_i}L(\theta)}{\sup_{\Theta_{i-1}}L(\theta)}=\prod_{i=2}^{k}\lambda_i.$$

بنابراین اگر λ_iها دو به دو مستقل باشند می‌توانیم توزیع $-2\ln\lambda=-2\sum_{i=2}^{K}\ln\lambda_i$ را با استفاده از مفهوم پیچش توابع به دست آوریم. برای نشان دادن استقلال λ_iها فرض می‌کنیم برای هر i، وقتی $\theta\in\Theta_i$، یک آمارهٔ بسندهٔ کامل T وجود داشته باشد که در آن λ_i کمکی است. حال با استفاده از قضیهٔ باسو تحت فرضیه H_0^i، λ_i از T مستقل است. در این صورت اگر $\lambda_{i+1},\dots,\lambda_k$ توابعی از T باشند، آن گاه تحت فرضیه H_0^i، $\lambda_i\perp(\lambda_{i+1},\dots,\lambda_k)\,;\ (i=2,\dots,k-1)$. اما با استفاده از رابطه (1)، استقلال دو به دوی

1. Cochran’s Theorem
2. Compound Tests

$\lambda_2,\dots,\lambda_k$ تحت H_0 نتیجه می‌شود. مثال سادهٔ زیر این ایده را روشن می‌سازد.

مثال 9: فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند که برای هر i، X_i دارای توزیع $N(0,\sigma_i^2)$ است. قرار می‌دهیم:

$$\Theta=\Theta_1=\left\{(\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2);\forall i:\sigma_i^2>0\right\}$$
$$\Theta_i=\left\{(\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2);\sigma_1^2=\dots=\sigma_i^2\right\};i=2,\dots,n.$$

دنبالهٔ $\{\Theta_i\}_{i=2}^n$ یک دنباله نزولی خواهد بود. حال اگر λ آمارهٔ GLRT برای آزمون $H_0:\sigma_1^2=\dots=\sigma_n^2$ در مقابل هر فرضیه متقابل امکان‌پذیر H_1 باشد و λ_i آمارهٔ GLRT برای آزمون $H_0^i:(\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2)\in\Theta_i$ در مقابل $H_1^i:(\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2)\in\Theta_{i-1}-\Theta_i$ که $i=2,\dots,n$ باشد، آن گاه $\lambda=\prod_{i=2}^n\lambda_i$. اگر قرار دهیم $S_i=X_i^2$، $(i=1,\dots,n)$ به سادگی نتیجه می‌شود که λ_i برای $i=2,\dots,n$ تابعی از نسبت $\sum_{j=1}^{i-1}S_j/\sum_{j=1}^{i}S_j$ است و تحت فرضیه H_0 برای هر $i=2,\dots,n$، آمارهٔ $(\sum_{j=1}^{i}S_j,S_{i+1},\dots,S_n)$ بسندهٔ کامل می‌باشد. بنابراین تحت H_0^i، λ_i آمارهٔ کمکی بوده و طبق قضیهٔ باسو از $\lambda_{i+1},\dots,\lambda_n$ مستقل است. اکنون با توجه به این که $H_0\equiv\bigcap_{i=2}^n H_0^i$، تحت فرضیه H_0، آماره‌های GLRT یعنی $\lambda_2,\dots,\lambda_n$ دو به دو مستقل‌اند (هاگ، 1962).

پیدا کردن پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت نااریب

فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی از خانوادهٔ $P=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$ باشد، می‌خواهیم آزمون $H_0:\theta\in\Theta_0$ در مقابل $H_1:\theta\in\Theta_1$ را انجام دهیم. تابع آزمون $\varphi:\chi\to[0,1]$ را در نظر می‌گیریم که در آن اگر $X=x$ مشاهده شود فرضیه H_0 را با احتمال $\varphi(x)$ رد می‌کنیم.

تعریف 1: آزمون φ_0 را پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت[1] (UMPT) در سطح α برای آزمون H_0 در مقابل H_1 می‌گوئیم هرگاه φ_0 یک آزمون در سطح α باشد، یعنی برای هر $\theta\in\Theta_0$: $E_\theta\left(\varphi_0(x)\right)\le\alpha$ و همچنین اگر φ هر آزمون دیگر در سطح α باشد، آن گاه برای هر $\theta\in\Theta_1$:
$E_\theta\left[\varphi_0(x)\right]\ge E_\theta\left[\varphi(x)\right]$ (لهمن و کسلا، 1998).

در حقیقت اگر تابع توان آزمون φ را به صورت $P_\varphi(\theta)=E_\theta\left[\varphi(X)\right]$ تعریف کنیم، برای پیدا کردن آزمون φ_0 که UMPT در سطح α باشد، باید بین تمام آزمون‌های $\varphi:\chi\to[0,1]$، φ_0 را طوری انتخاب کنیم که برای هر $\theta\in\Theta_1$، $P_{\varphi_0}(\theta)$ نسبت به شرط جانبی «برای هر $\theta\in\Theta_0$، $P_\varphi(\theta)\le\alpha$» حداکثر مقدار را اختیار کند.

تعریف 2: آزمون φ را نااریب در سطح α گوئیم هرگاه برای هر $\theta\in\Theta_0$، $E_\theta\left(\varphi(X)\right)\le\alpha$ و برای هر $\theta\in\Theta_1$ $E_\theta\left(\varphi(X)\right)\ge\alpha$ (لهمن و کسلا، 1998).

تعریف 3: آزمون φ_0 را پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت نااریب[2] (UMPUT) در سطح α گوئیم هرگاه از میان همه آزمون‌های نااریب در سطح α بیشترین توان را به ازای هر $\theta\in\Theta_1$ داشته باشد. یعنی اگر φ هر آزمون نااریب دیگر در سطح α باشد، برای هر $\theta\in\Theta_1$، $E_\theta\left[\varphi_0(X)\right]\ge E_\theta\left[\varphi(X)\right]$ (لهمن و کسلا، 1998).

قضیهٔ باسو می‌تواند برای پیدا کردن UMPUTها نیز مفید باشد. برای این منظور مثال زیر را مطرح می‌کنیم:

مثال 10: فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_n$ $(n\ge2)$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد که در آن هر دو پارامتر $\mu\in R$ و $\sigma>0$ نامعلوم‌اند. تعریف می‌کنیم $T_1=\sum_{i=1}^n X_i$ و $T_2=\sum_{i=1}^n X_i^2$. UMPUT

1. Uniformly Most Powerful Test
2. Uniformly Most Powerful Unbiased Test

برای آزمون $H_0: \mu=0$ در مقابل $H_1: \mu \neq 0$ به صورت $\phi(T_1,T_2)=I_{(c_1(T_2),c_2(T_2))}(T_1)$ داده می‌شود که در آن c_1 و c_2 توابع دلخواه هستند و

$$E_{0,\sigma^2}\left[\phi(T_1,T_2)\,\middle|\,T_2\right]=\alpha \qquad (2)$$

$$Cov_{0,\sigma^2}\left[T_1,\phi(T_1,T_2)\,\middle|\,T_2\right]=0. \qquad (3)$$

حال می‌توان از (2) نتیجه گرفت که:

$$P_{0,\sigma^2}\left(c_1(T_2)\le T_1\le c_2(T_2)\,\middle|\,T_2\right)=1-\alpha. \qquad (4)$$

T_2 آمارۀ بسندۀ کامل برای σ^2 تحت فرضیه H_0 است و همچنین $U=T_1/\sqrt{T_2}$ آمارۀ کمکی می‌باشد و لذا با استفاده از قضیۀ باسو این منجر به استقلال T_2 و U می‌شود. پس توزیع شرطی $U|T_2$ با توزیع غیر شرطی U برابر خواهد بود. لذا از (3) و (4) برای بعضی ثابت‌های d_1 و d_2 که به داده‌ها بستگی ندارند، داریم:

$$P\left(d_1\le U\le d_2\right)=1-\alpha \qquad (5)$$

$$Cov\left[U, I_{[d_1,d_2]}(U)\right]=0. \qquad (6)$$

چون تحت فرضیه H_0، $E(U)=0$، پس از (6) نتیجه می‌گیریم

$$\int_{d_1}^{d_2} u\,h(u)\,du=0 \qquad (7)$$

که در آن h، تابع چگالی احتمال کناری U است. همچنین از(5) داریم:

$$\int_{d_1}^{d_2} h(u)\,du=1-\alpha. \qquad (8)$$

با استفاده از دو معادله (7) و(8) می‌توانیم d_1 و d_2 را پیدا کنیم. قضیۀ باسو محاسبات را خیلی ساده کرده است. زیرا به جای پیدا کردن توزیع شرطی $T_1|T_2$ توزیع کناری U را که یک آمارۀ کمکی تحت فرضیه H_0 است، پیدا می‌کنیم و می‌دانیم توزیع U معادل با توزیع t-استیودنت با $n-1$ درجۀ آزادی خواهد بود و لذا به راحتی d_1 و d_2 پیدا می‌شوند. با توجه به رابطۀ

$$T_1/\sqrt{T_2}=\frac{T_1}{\sqrt{T_1^2/n+S^2}}=\frac{T_1/S}{\sqrt{1+(T_1/S)^2/n}}$$

و این که $g(x)=x/\sqrt{1+x^2/n}$ تابعی صعودی از x است، $T_1/\sqrt{T_2}$ نیز یک تابع صعودی از T_1/S خواهد بود و با توجه به این که $T=\sqrt{\frac{n-1}{n}}T_1/S$ دارای توزیع t-استیودنت با $n-1$ درجۀ آزادی است، روابط (7) و (8) به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\int_{c_1}^{c_2} f_T(t)\,dt=1-\alpha \qquad (9)$$

$$\int_{c_1}^{c_2} t f_T(t)\,dt=0. \qquad (10)$$

بنابراین با استفاده از (10) داریم:

$$\int_{c_1}^{c_2} t\left(1+t^2/(n-1)\right)^{-n/2}dt=0.$$

چون تابع زیر انتگرال یک تابع فرد ناصفر است انتگرال بالا فقط روی ناحیۀ قرینه نسبت به مبدأ صفر خواهد شد، یعنی $c_1=-c_2$. و لذا با استفاده از (9) داریم

$$P\left(T_{n-1}<-c_2\right)=\alpha/2$$

و یا

$$c_1=-c_2=t_{n-1,\alpha/2}.$$

و بنابراین

$$\phi(t)=1-I_{(c_1,c_2)}(t)=\begin{cases}1 & |t|>-t_{n-1,\alpha/2}\\ 0 & |t|\le -t_{n-1,\alpha/2}\end{cases}$$

یک UMPUT برای آزمون مورد نظر است (لهمن و رومانو، 2005).

نکته 1: همان طور که در مثال 10 مشاهده می‌شود جایگاه قضیهٔ باسو در به دست آوردن UMPUT این است که امید ریاضی مشروط به آمارهٔ بسندهٔ کامل تحت فرضیه صفر با اعمال یک سری عملیات جبری به صورت امید ریاضی یک آمارهٔ کمکی مشروط به آمارهٔ بسندهٔ کامل تحت فرضیه صفر در می‌آید و لذا با استفاده از قضیهٔ باسو امید شرطی به امید غیرشرطی تبدیل می‌شود و با این کار به دست آوردن امید ریاضی ساده‌تر خواهد شد.

مثال 11: اگر $(X_n,Y_n),\dots,(X_1,Y_1)$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع نرمال دو متغیره

$$N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{bmatrix}\right)$$

باشدکه در آن σ_1 و σ_2 و ρ پارامترهای مجهول اند و $|\rho|<1$. می‌خواهیم آزمون $H_0:\rho\le 0$ در مقابل $H_1:\rho>0$ را انجام دهیم. وقتی که

$$f_{\sigma_1,\sigma_2,\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \propto e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\sum x_i^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\sum x_iy_i}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\sum y_i^2}{\sigma_2^2}\right]} \propto e^{\theta_1t_1+\theta_2t_2+\theta_3t_3}$$

به طوری که

$$(T_1,T_2,T_3)=\left(\sum X_i^2,\sum X_iY_i,\sum Y_i^2\right)$$

آمارهٔ بسنده برای (σ_1,σ_2,ρ) و یا

$$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2},\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)},-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right)$$

می‌باشد. از طرفی دیگر آزمون فوق معادل با آزمون $H_0:\theta_2\le 0$ در مقابل $H_1:\theta_2>0$ است. با شرط داشتن T_1 و T_3، UMPUT در سطح α به صورت $\phi_0(t_1,t_2,t_3)=I_{(c(t_1,t_3),\infty)}(t_2)$ خواهد بود به طوری که $c(t_1,t_3)$ طوری انتخاب می‌شود که:

$$\begin{aligned}&E_{\theta_2=0}\left[1-\phi_0(T_1,T_2,T_3)\,\middle|\,(T_1,T_3)=(t_1,t_3)\right]\\&=P_{\theta_2=0}\left[T_2\le c(t_1,t_3)\,\middle|\,T_1=t_1,T_3=t_3\right]\\&=1-\alpha.\end{aligned}$$

توجه داریم که روی ناحیهٔ $\theta_2=0$ (به طور معادل $\rho=0$) (T_1,T_3) یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای (θ_1,θ_3) و یا (σ_1,σ_2) است و توزیع $R=T_2/\sqrt{T_1}\sqrt{T_3}$ به (σ_1,σ_2) بستگی ندارد و لذا یک آمارهٔ کمکی بوده و بنابر قضیهٔ باسو از (T_1,T_3) مستقل است. لذا

$$\phi_0(t_1,t_2,t_3)=I_{(c,\infty)}(t_2/\sqrt{t_1}\sqrt{t_3})$$

که c با توجه به رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_{\theta_2=0}\left(T_2/\sqrt{T_1}\sqrt{T_3}\le c\right)=1-\alpha.$$

از طرف دیگر تحت فرضیه $\theta_2=0$ (یا $\rho=0$)، $g(R)=R\sqrt{n-2}/\sqrt{1-R^2}$ دارای توزیع t- استیودنت با $n-2$ درجهٔ آزادی است که چون $g(r)$ یک تابع صعودی از r است، $\phi_0(r)=I_{(c,\infty)}(r)$ به صورت $\phi_0(r)=I_{(c',\infty)}(g(r))$ در می‌آید که در آن $c'=t_{(n-2,1-\alpha)}$. لذا، UMPUT برای آزمون داده شده به صورت

$$\phi_0(r)=I_{(t_{(n-2,1-\alpha)},\infty)}(r\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r^2})$$

خواهد بود (لهمن و رومانو، 2005).

مثال 12: فرض می‌کنیم دو متغیر تصادفی مستقل X و Y به ترتیب از توزیع‌های $Beta(\mu,1)$ و $Beta(\theta,1)$ باشند، می‌خواهیم UMPUT در سطح α برای آزمون $H_0:\mu=\theta$ در مقابل $H_1:\mu<\theta$ را به دست آوریم. اگر قرار دهیم $V=-\ln X$ و $W=-\ln Y$، آن گاه V و W به ترتیب دارای توزیع‌های نمایی $E(\mu)$ و $E(\theta)$ خواهند بود. تحت

فرضیه H_0، $T=-(\ln X+\ln Y)$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است و $U=V/T$ دارای توزیع $U(0,1)$ است و بنابراین یک آمارهٔ کمکی است و در نتیجه طبق قضیهٔ باسو $T \perp U$. UMPUT برای آزمون فوق به صورت $\phi(V,W)=I_{(-\infty,c(W))}(V)$ داده می‌شود که در آن $E_{\mu=\theta}\left(\phi(V,W)\middle|T\right)=\alpha$. پس:

$$\begin{aligned}\alpha &= E_{\mu=\theta}\left(\phi(V,W)\middle|T\right)\\ &= P\left(V\le c(W)\middle|T\right)\\ &= P\left(V/T\le c(W)/T\middle|T\right)\\ &= P\left(U\le c(W)/T\right)\\ &= c(W)/T.\end{aligned}$$

بنابراین $c(W)=\alpha T$ و در نتیجه UMPUT برای آزمون فوق به صورت $\phi(u)=I_{(-\infty,\alpha]}(u)$ خواهد بود.

مثال 13: اگر $X_1,\dots,X_m$ و $Y_1,\dots,Y_n$ دو نمونهٔ تصادفی مستقل به ترتیب از توزیع‌های $E(1/\sigma,\lambda)$ و $E(1/\tau,\eta)$ باشند که همه پارامترهای آن‌ها مجهول‌اند، می‌خواهیم یک UMPUT در سطح α برای آزمون $H_0:\tau/\sigma\le\Delta$ در مقابل $H_1:\tau/\sigma>\Delta$ به دست آوریم. تابع چگالی توأم به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sigma^{-m}\tau^{-n}e^{-\sum x_i/\sigma+m\lambda/\sigma-\sum y_i/\tau+n\eta/\tau}\,u(x_{(1)}-\lambda)u(y_{(1)}-\eta)$$

که متعلق به یک خانوادهٔ نمایی با پارامترهای، $\theta_1=-1/\sigma$، $\theta_2=\eta$ و $\theta_3=\lambda$ و با آمارهٔ بسندهٔ

$$(T_0,T_1,T_2,T_3)=\left(\sum Y_i,\sum X_i,Y_{(1)},X_{(1)}\right)$$

است. با یک محاسبه ساده پارامترها به صورت $\theta_0^*=-1/\tau+1/\Delta\sigma$ و $\theta_i^*=\theta_i$ برای $i=1,2,3$ و آمارهٔ بسنده به صورت

$$(T_0^*,T_1^*,T_2^*,T_3^*)=\left(\sum Y_i,\sum X_i+\sum \tfrac{Y_i}{\Delta},Y_{(1)},X_{(1)}\right)$$

در می‌آیند. در این صورت آزمون فوق معادل با آزمون $H_0:\theta_0^*\le 0$ در مقابل $H_1:\theta_0^*>0$ خواهد بود، که UMPUT در سطح α برای آن به صورت $\phi\left(t_0^*,t_1^*,t_2^*,t_3^*\right)=I_{(c(t_1^*,t_2^*,t_3^*),\infty)}\left(t_0^*\right)$ خواهد بود و $c(t_1^*,t_2^*,t_3^*)$ طوری انتخاب می‌شود که:

$$\begin{aligned}&E_{\theta_0^*=0}\left[1-\phi(T_0^*,T_1^*,T_2^*,T_3^*)\middle|(T_1^*,T_2^*,T_3^*)=(t_1^*,t_2^*,t_3^*)\right]\\ &=P_{\theta_0^*=0}\left[T_0^*\le c(t_1^*,t_2^*,t_3^*)\middle|(T_1^*,T_2^*,T_3^*)=(t_1^*,t_2^*,t_3^*)\right]\\ &=1-\alpha.\end{aligned}$$

روی ناحیهٔ $\theta_0^*=0$ و به طور معادل $\tau/\sigma=\Delta$، (T_1^*,T_2^*,T_3^*) یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای $(\theta_1^*,\theta_2^*,\theta_3^*)$ و یا (σ,η,λ) است و با توجه به این که $\frac{2}{\tau}\sum_{i=1}^n(Y_i-Y_{(1)})$ و $\frac{2}{\sigma}\sum_{i=1}^m(X_i-X_{(1)})$ به ترتیب دارای توزیع‌های مستقل χ^2_{2n-2} و χ^2_{2m-2} هستند، آمارهٔ

$$S=\frac{m-1}{\Delta(n-1)}\sum_{i=1}^n(Y_i-Y_{(1)})\Big/\sum_{i=1}^m(X_i-X_{(1)})$$

روی ناحیهٔ مذکور دارای توزیع $F\left(2n-2,2m-2\right)$ است. پس توزیع آمارهٔ S به پارامتر (σ,η,λ) بستگی ندارد و لذا یک آمارهٔ کمکی است؛ بنابراین طبق قضیهٔ باسو $S\perp(T_1^*,T_2^*,T_3^*)$ و در نتیجه $\phi(S)=I_{(c,\infty)}(S)$ که c با توجه به رابطهٔ $P_{\theta^*=0}\left(S\le c\right)=1-\alpha$ به دست می‌آید یعنی $c=F_{2(n-1),2(m-1),1-\alpha}$. لذا UMPUT به صورت $\phi(s)=I_{(F_{2n-2,2m-2,1-\alpha},\infty)}(s)$ خواهد بود.

آزمون مدل‌های اقتصادسنجی[1]

قضیهٔ باسو برای محاسبهٔ آزمون فرضیه‌های مرکب در اقتصادسنجی نیز به کار می‌رود. مسئله آزمون یک مجموعه

1. Econometric Models

از فرضیه‌های وابسته به پارامترهای معادلات مدل‌های اقتصادسنجی است. مدل تأخیری[1] $E(Y_t)=\sum_{i=1}^{p} X_{t-i}$ و مدل رگرسیونی چندجمله‌ای[2] $E(Y_i)=\sum_{j=0}^{p} \beta_j X_i^j$، $i=1,\dots,n$ (که در آنها X_iها متغیرهای پیشگو[3] و Y_iها متغیرهای پاسخ[4] هستند) از این جمله اند، که باید پارامترهای مدل را برآورد کنیم. در تحلیل رگرسیون داده‌های سری زمانی، اگر مدل رگرسیون نه فقط شامل مقدار جاری متغیرهای توضیحی بلکه شامل مقادیر با تأخیر (مربوط به گذشته) آن‌ها باشد، «مدل با تأخیر توزیع شده» یا «مدل تأخیری» نامیده می‌شود ولی اگر مدل یک یا چندین مقدار با وقفه متغیر وابسته را جزء متغیرهای توضیحی خود داشته باشد، مدل اتورگرسیو نامیده می‌شود.

بنابراین $Y_t=\alpha+\beta_0 X_t+\beta_1 X_{t-1}+\beta_2 X_{t-2}+u_t$ نشان‌دهنده یک مدل تأخیری و $Y_t=\alpha+\beta X_t+\gamma Y_{t-1}+u_t$ مثالی از یک مدل اتورگرسیو[5] است. سه دلیل عمده برای وجود تأخیر وجود دارد:

1. دلایل روانی: مردم عادات مصرفی خود را به دنبال یک کاهش قیمت و یا افزایش درآمد فوراً تغییر نمی‌دهند. دلیل این است که فرآیند تغییر ممکن است مطلوبیت منفی (نارضایتی) به وجود آورد. بنابراین آنهایی که مثلاً با بردن یک جایزه، در یک لحظه میلیونر می‌شوند ممکن است برای مدت زیادی شیوهٔ زندگی خود را تغییر ندهند، زیرا که ممکن است ندانند که چگونه نسبت به این ثروت عکس‌العمل نشان دهند. البته در یک فاصله زمانی آنها یاد می‌گیرند که چگونه با این وضع زندگی کنند. هم چنین ممکن است که افراد ندانند که تغییر به وجود آمده دائمی یا موقتی است؛ بنابراین واکنش فرد به موقتی یا دائمی بودن افزایش، بستگی دارد. اگر این افزایش یک بار برای همیشه باشد ممکن است یک شخص تمام آن را پس‌انداز کند در حالی که شخص دیگری در همین وضعیت تمام افزایش را مصرف کند.

2. دلایل فنی: فرض کنیم که قیمت سرمایه نسبت به نیروی کار کاهش یابد. در این صورت جایگزینی سرمایه به جای نیروی کار از نظر اقتصادی مناسب خواهد بود. البته افزودن سرمایه نیاز به زمان دارد. علاوه بر این اگر این کاهش موقتی باشد، ممکن است بنگاه‌های اقتصادی برای جایگزین کردن عامل کار به وسیلهٔ سرمایه شتاب نکنند. در بعضی مواقع، می‌توان تأخیرها را به حساب اطلاعات ناقص گذاشت.

3. دلایل نهادی: الزامات ناشی از عقد قرارداد، ممکن است بنگاه‌ها را از تغییرات در نیروی کار و یا استفاده از منابع دیگر مواد اولیه منع کند. به عنوان مثال، افرادی که پول‌های خود را در حساب‌های سپرده بلند مدت گذاشته‌اند، در واقع پول خود را زندانی کرده‌اند زیرا ممکن است شرایط بازار پول تغییر کرده و سود بیش‌تری از راه‌های دیگر به دست آورند.

اکنون به عنوان نمونه آزمون مدل‌های رگرسیونی را بررسی می‌کنیم:

مثال 14: مدل رگرسیونی $Y_t=X_t^T\beta+\varepsilon_t$ که در آن $t=1,\dots,n$ ، $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$، $|\rho|<1$ و $u_1,\dots,u_n \overset{i.i.d}{\sim} N(0,\sigma^2)$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} Y_t-\rho Y_{t-1} &= X_t^T\beta-\rho X_{t-1}^T\beta+\varepsilon_t-\rho\varepsilon_{t-1} \\ &=(X_t-\rho X_{t-1})^T\beta+u_t;\ t=2,\dots n. \end{aligned}$$

پس می‌توانیم به جای مدل بالا مدل ساده شده زیر را در نظر بگیریم:

$$Y_t=X_t^T\beta-\rho X_{t-1}^T\beta+\rho Y_{t-1}+u_t;\ t=2,\dots n.$$

با انجام دو مرحله پارامترهای نامعلوم را بر آورد می‌کنیم. در اولین مرحله ρ را بر آورد می‌کنیم و با استفاده از برآورد کمترین مربعات روی متغیرهای تبدیل یافته $Y_t-\hat{\rho}Y_{t-1}$ و $X_t^T-\hat{\rho}X_{t-1}^T$، β را برآورد می‌کنیم. فرضیه مرکبی که باید آزمون شود به صورت $H_0:\rho=0$ در مقابل $H_1:\rho=0,\beta=0$ است. اگر H_0 پذیرفته شود β را به روش حداقل مربعات بر پایه n مشاهده برآورد می‌کنیم و بنابراین تحت فرضیه H_0، $\hat{\sigma}^2=(Y-X\hat{\beta})^T(Y-X\hat{\beta})/(n-k)$ و $\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY$ آماره‌های بسنده برای β و σ^2 هستند و اجزای

---
1. Lag Model
2. Polinomial Regression
3. Predictor Variable
4. Response Variable
5. Autoregressive Model

تشکیل‌دهنده آمارهٔ آزمون $\beta = 0$ که دارای توزیع F است را تشکیل می‌دهند. (یعنی آمارهٔ آزمون $\beta = 0$ که به صورت $\hat{\beta}(X^T X)\hat{\beta}/k\hat{\sigma}^2$ است تابعی از آماره‌های بسندهٔ $\hat{\beta}$ و $\hat{\sigma}^2$ است.) از طرف دیگر آمارهٔ آزمون $\rho = 0$ دارای توزیع t-استیودنت است و لذا به پارامتر β و σ^2 بستگی ندارد. بنابراین با به کارگیری قضیهٔ باسو دو آمارهٔ آزمون $\beta = 0$ و $\rho = 0$ از هم مستقل می‌شوند (فیلیپس و مک کاب، 1988).

شبیه‌سازی آزمون فرضیه‌های آماری

در برخی از مسائل آزمون فرضیه‌های آماری به خصوص آزمون‌های نسبت درست‌نمایی توزیع آمارهٔ آزمون قابل محاسبه نیست و یا به دست آوردن آن دشوار است که در این گونه موارد از شبیه‌سازی استفاده می‌گردد. اولین بار دیمیتروف و همکاران 2001 آن را معرفی کردند. اساس کار استفاده از قانون اعداد بزرگ[1] است؛ به این مفهوم که تابع توزیع تجربی[2] آمارهٔ آزمون با احتمال 1 به توزیع نظری هم‌گراست. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ و $Y_1,\dots,Y_n$ نمونه‌های تصادفی مربوط به توزیع‌هایی با توابع چگالی $f_\theta(x)$، $\theta = 0,1$ باشند و بخواهیم $H_0:\theta = 0$ در مقابل $H_1:\theta = 1$ را آزمون کنیم. لگاریتم نسبت درست‌نمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda = \ln \lambda(\mathbf{x}) = \ln \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln f_1(x_i) - \ln f_0(x_i)\right).$$

اگر دم‌های توزیع $\lambda(\mathbf{X})$ به ترتیب تحت فرضیه‌های H_0 و H_1 برابر با $\bar{F}_0(t) = P_0\left(\lambda(\mathbf{X}) > t\right)$ و $\bar{F}_1(t) = P_1\left(\lambda(\mathbf{X}) > t\right)$ باشد و تعریف کنیم:

$$U = \ln f_1(X) - \ln f_0(X),$$
$$V = \ln f_1(Y) - \ln f_0(Y)$$

که در آن متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب دارای توابع چگالی متناظر با فرضیه‌های H_0 و H_1 هستند. برای n بزرگ آمارهٔ آزمون λ تحت فرضیه H_0 دارای توزیع نرمال مجانبی با میانگین $nE(U)$ و واریانس $n\mathrm{Var}(U)$ است؛ بنابراین برای α داده شده سطح معناداری t_α از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = P_0\left(\ln \lambda(\mathbf{X}) > t_\alpha\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{t_\alpha - nE(U)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(U)}}\right)$$

و در پی آن $t_\alpha \approx nE(U) + z_\alpha \sqrt{n\mathrm{Var}(U)}$، توان آزمون برابر است با:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= P_1\left(\ln \lambda(\mathbf{Y}) > t_\alpha\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{t_\alpha - nE(V)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(V)}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{E(U) - E(V)}{\sqrt{\mathrm{Var}(V)}} + z_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(U)}}{\sqrt{\mathrm{Var}(V)}}\right). \end{aligned}$$

برای محاسبه تابع توزیع تجربی آمارهٔ آزمون نسبت درست‌نمایی تحت فرضیه‌های H_0 و H_1 از شبیه‌سازی به روش مونت کارلو[3] استفاده می‌شود. الگوریتم زیر برای حجم نمونه دلخواه پیشنهاد می‌گردد.

1. توابع چگالی f_0 و f_1 و اندازهٔ نمونه n را در نظر بگیرید.
2. دنباله N نمونه تصادفی $\mathbf{x}^{(j)} = \left(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\right)$، از توزیع f_0 و $\mathbf{y}^{(j)} = \left(y_1^{(j)},\dots,y_n^{(j)}\right)$ از توزیع f_1 که $j = 1,\dots,N$ را تولید و N مقدار آماره‌های آزمون را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} \lambda_j^x &= \ln \lambda(\mathbf{x}^{(j)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\ln f_1(x_i^{(j)}) \\ &\quad - \ln f_0(x_i^{(j)})],\ j = 1,\dots,N, \\ \lambda_j^y &= \ln \lambda(\mathbf{y}^{(j)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\ln f_1(y_i^{(j)}) \\ &\quad - \ln f_0(y_i^{(j)})],\ j = 1,\dots,N. \end{aligned}$$

3. تابع‌های دم تجربی زیر را محاسبه کنید:

1. Law of Large Numbers
2. Empirical Distribution Function
3. Monte-Carlo

$$\bar{F}_{0,N}(t) = \frac{\#\{\lambda_j^x : \lambda_j^x > t\}}{N},\ t > 0$$
$$\bar{F}_{1,N}(t) = \frac{\#\{\lambda_j^y : \lambda_j^y > t\}}{N},\ t > 0.$$

4. مقدار بحرانی t_α آماره آزمون برای α داده شده به عنوان کوچک‌ترین جواب معادله $\bar{F}_{0,N}(t) = \alpha$ و توان آزمون را از معادله $\bar{F}_{1,N}(t_\alpha) = p_\alpha$ محاسبه کنید.

5. برای نمونهٔ دلخواه $(x_1,\dots,x_n)$، آمارهٔ آزمون λ و p - مقدار آزمون H_0 در مقابل H_1 را از روی فرمول $\bar{F}_{0,N}(\lambda)$ محاسبه کنید. اکنون اگر $\lambda > t_\alpha$ فرضیه H_0 را رد کنید. سپس احتمال خطای نوع II یعنی $\beta = 1 - \bar{F}_{1,N}(\lambda)$ را محاسبه کنید.

برای حالتی که حجم نمونه بزرگ باشد الگوریتم زیر پیشنهاد می‌گردد.

6. توابع چگالی f_0 و f_1 و اندازه نمونه n را در نظر بگیرید.

7. دنباله N نمونهٔ تصادفی $(x_1,\dots,x_n)$، از توزیع f_0 و $(y_1,\dots,y_n)$ از توزیع f_1 که $j = 1,\dots,N$ را تولید و N مقدار آماره‌های آزمون:

$$u_j = u(x_j) = \ln f_1(x_j) - \ln f_0(x_j),$$
$$v_j = u(y_j) = \ln f_1(y_j) - \ln f_0(y_j)$$

و $\bar{u} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j$، $\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j$، $s_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(u_j - \bar{u}\right)^2$ و $s_v^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(v_j - \bar{v}\right)^2$ را محاسبه کنید.

8. مقدار بحرانی t_α و توان آزمون را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$t_\alpha \approx n\bar{u} + z_\alpha s_u \sqrt{n},$$
$$p_\alpha = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{u} - \bar{v}}{s_v} + z_\alpha \frac{s_u}{s_v}\right).$$

9. برای نمونه دلخواه $(x_1,\dots,x_n)$، مقدار آمارهٔ آزمون λ و p - مقدار آزمون H_0 در مقابل H_1 را از روی فرمول محاسبه کنید:

$$P_0\left(\ln\lambda(\mathbf{X}) > \lambda\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\lambda - n\bar{u}}{s_u\sqrt{n}}\right).$$

اکنون اگر $\lambda > t_\alpha$ فرضیه H_0 را رد کنید. سپس احتمال خطای نوع II یعنی $\beta = 1 - p_\alpha$ را محاسبه کنید.

در حالت کلی برای شبیه‌سازی آزمون فرضیه‌ها با آمارهٔ آزمون T و مقدار مشاهده شده آن t_1 به صورت زیر عمل می‌کنیم. تحت فرضیه H_0، $m-1$، $m = 2,3,\dots$ مشاهده مستقل از آماره آزمون T را شبیه‌سازی می‌کنیم یعنی $t_2,\dots,t_m$ که آماره‌های ترتیبی آنها را با $t_{(1)} < \dots < t_{(m)}$ نمایش می‌دهیم. در ادامه سه دسته مهم از ناحیه‌های رد را بررسی می‌کنیم:

دسته 1: مسائلی که با بزرگ بودن آماره آزمون، انتظار رد فرضیه H_0 را داشته باشیم. در این حالت اگر رتبه t_1 بزرگتر عضوی از $N_m = \{1,\dots,m\}$ شود، فرضیه H_0 را رد می‌کنیم و در پی آن ناحیه بحرانی آزمون به صورت $C = \{t_1 : t_1 \geq t_{(k)}, \exists k \in N_m\}$ خواهد شد. با در نظر گرفتن سطح α برای آزمون ناحیه بحرانی برابر است با:

$$C = \left[t_{(\lceil m(1-\alpha)\rceil + 1)}, +\infty\right).$$

دسته 2: مسائلی که با کوچک بودن آماره آزمون، انتظار رد فرضیه H_0 را داشته باشیم. در این حالت اگر رتبه t_1 کوچک‌تر عضوی از N_m شود، فرضیه H_0 را رد می‌کنیم. به طور مشابه ناحیه بحرانی برابر است با:

$$C = \left(-\infty, t_{([m\alpha])}\right].$$

دسته 3: مسائلی که با بزرگ یا کوچک بودن آمارهٔ آزمون، انتظار رد فرضیه H_0 را داشته باشیم. در این حالت:

$$C = \{t_1 : t_1 \leq t_{(k_1)} \vee t_1 \geq t_{(k_2)},$$
$$\exists k_1, k_2 \in N_m, k_1 < k_2\}.$$

حال اگر سطح آزمون α باشد، باید داشته باشیم:

$$P\left(T \leq t_{(k_1)}\right) + P\left(T \geq t_{(k_2)}\right) \leq \alpha$$

و در نهایت ناحیه بحرانی برابر است با:

$$C = \left(-\infty, t_{\left(\left[m\frac{\alpha}{2}\right]\right)}\right] \cup \left[t_{\left(\left[m\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+1\right)}, +\infty\right)$$

بحث و نتیجه‌گیری

به کمک قضیهٔ باسو بدون این که توزیع توأم دو آمارهٔ کمکی و آمارهٔ بسنده کامل محاسبه شوند، وجود این استقلال ثابت می‌شود. در برخی مسائل آزمون فرضیه‌ها از جمله پیدا کردن توزیع نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته و پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت نااریب، آزمون‌های مرکب و آزمون‌های مدل‌های اقتصادسنجی نیاز به وجود اثبات استقلال دو آمارهٔ کمکی و آمارهٔ بسنده کامل داریم که با استفاده از قضیهٔ باسو این مسائل به راحتی قابل محاسبه خواهد بود.

References

[1] Basu, D., 1955, On Statistics Independent of a Complete Sufficient Statistic, Sankhya, 15, pp. 377-380.

[2] Boos, D.D. and Hughes-Oliver, J.M., 1998, Applications of Basu's Theorem, Amer. Statist., 52, pp. 218-221.

[3] David, H.A., 1981, Order Statistics, 2nd Edition, Wiley, New York.

[4] David, H.A., 1988, Studentized Range, Encyclopedia of Statistical Sciences, IX , Kotz, S. and Johnson, N.L. eds., Wiley, New York, pp. 39-43.

[5] Dimitrov, Khalil, B.Z., Ghitany, M. and Rykov V., 2001, Likelihood Ratio Test for Almost Lack of Memory Distributions. Technical Report No. 1/01, Concordia University.

[6] Ghosh, M., 2002, Basu's Theorem with Applications, Sankhya, A, 64, pp. 509-531.

[7] Hogg, R.V., 1953, Testing the Equality of Means of Rectangular Populations, Ann. Math. Statist., 24, p. 691.

[8] Hogg, R.V., 1961, On the Resolution of Statistical Hypotheses, J. Amer. Statist. Assoc., 32, pp. 978-989.

[9] Hogg, R.V. and Craig, A.T., 1956, Sufficient Statistics in Elementary Distribution Theory, Sankhya, 17, pp. 209-216.

[10] Madow, W.G., 1938, Contributions to the Theory of Multivariate Statistical Analysis, Trans. Amer. Math. Soc., 44, pp. 454-495.

[11] Paulson, E., 1941, On Certain Likelihood Ratio Tests Associated With the Exponential Distribution, Ann. Math. Statist, 12, pp. 301-306.

[12] Lehmann, E.L. and Casella, G., 1998, Theory of Point Estimation, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York.

[13] Lehmann, E. L. and Romano, J. P., 2005,. Testing Statistical Hypotheses. 3rd edition. Springer, New York.

[14] Phillips, G.D.A. and McCabe, B.P.M., 1988, Some Applications for Basu's Independence Theorem in Testing Econometric Models, Statistica Neerlandica, 42, pp. 37-46.

[15] Read, C.B., 1988, Studentization, Encyclopedia of Statistical Sciences, IX , Kotz, S. and Johnson, N.L. eds., Wiley, New York, pp. 35-36.

[16] Searle, S.R., 1971, Linear Models, New York: Wiley.

[17] Wang, Y.Y., 1971, Probabilities of the Type I Error of the Welch Tests for the Behren's-Fisher Problem, J. Amer. Statist. Assoc, 66, pp. 605-608.