

کاربرد قضیه حد مرکزی تابعی در آزمون ریشه واحد در مدل‌های خودبازگشتی

صدیقه زمانی مهربان¹؛ علیرضا نعمت‌اللهی^{2*}

دریافت: 1392/10/09

پذیرش: 1394/03/09

چکیده

در مطالعه توزیع حدی آماره‌های مورد استفاده در آزمون‌های ریشه واحد معمولاً نیاز به قضیه معروف دانسکر (قضیه حد مرکزی تابع) می‌باشد که در کتاب‌های استاندارد درسی کمتر به آن اشاره شده است. در این مقاله رفتار حدی آماره‌های آزمون ریشه واحد را در مدل $AR(1)$ در حالت‌های بدون جمله ثابت و با جمله ثابت با استفاده غیرمستقیم از قضیه دانسکر مطالعه می‌کنیم که در آن خطاها، نوفه سفید گاوسی با میانگین صفر و واریانس متناهی σ^2 می‌باشند. همچنین حالتی که خطاها ایستا ولی نوفه سفید نباشند (به عبارت دیگر نوفه رنگی باشند) را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس نتایج حاصل شده را به مدل $AR(p)$ تعمیم می‌دهیم. چند مثال برای روشن‌تر شدن مطلب ارائه می‌گردد.

واژگان کلیدی: مدل خودبازگشتی، آزمون ریشه واحد، حرکت برآونی، قضیه حد مرکزی تابعی.

1. دانشجوی دکترا آمار، دانشگاه شیراز s.zamani121@yahoo.com

2. استاد گروه آمار، دانشگاه شیراز (*نویسنده مسئول) ar.nematollahi@gmail.com

مقدمه

در مدل‌های خودبازگشتی مرتبه اول در $H_0: \phi = \phi_0$ آزمون برای $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ مقابل $H_1: \phi < \phi_0$ از آماره‌هایی بر پایه $\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}$ استفاده می‌شود که در آن $\hat{\phi}$ برآورد حداقل مربعات معمولی ϕ دارای توزیع نرمال با میانگین ϕ و $Var(\hat{\phi}) = \frac{\sigma_z^2}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}$ می‌باشد که σ_z^2 واریانس نوفه سفید Z_t می‌باشد.

آماره‌های

$$N = (\hat{\phi} - \phi_0) / \sqrt{\sigma_z^2 (\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2)^{-1}}$$

و

$$T = (\hat{\phi} - \phi_0) / \sqrt{\hat{\sigma}_z^2 (\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2)^{-1}}$$

از آماره‌های متداول برای آزمون فوق هستند که بر پایه $\hat{\phi}$ بنا می‌شوند. می‌توان نشان داد که آماره‌های آزمون تحت فرض $|\phi| < 1$ به ترتیب دارای توزیع‌های حدی نرمال و t هستند. (وی¹ (2006)) در آزمون ریشه واحد (در حالتی که $\phi_0 = 1$) آماره‌های آزمون دارای توزیع حدی نرمال و t نبوده و در توزیع به تابعی از فرآیند وینر (حرکت برآونی) همگرا می‌شوند. در واقع برای این همگرایی از قضیه حد مرکزی کلاسیک نمی‌توان استفاده کرد و بایستی قضیه حد مرکزی تابعی (قضیه دانسکر² (1951)) را به کار برد. با توجه به پیچیدگی اثبات قضیه دانسکر، در این مقاله این قضیه را در یک حالت خاص به صورت غیرمستقیم ثابت و به کار خواهیم برد.

مفاهیم پایه

فرض کنید $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس متناهی σ^2 باشد. در این بخش به معرفی دو

فرم از قضیه دانسکر می‌پردازیم. تابع تصادفی

$U_n(t, w)$ تعریف شده به فرم زیر را در نظر بگیرید

$$U_n(t, w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(w) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}(w),$$

که در آن $t \in [0, 1]$ و $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. توجه کنید که $U_n(t, w)$ تابع تصادفی پیوسته است در نتیجه عضو فضای $C[0, 1]$ (فضایی از همه توابع پیوسته بر روی $[0, 1]$) با متر

$$d(x, y) = \sup_t |x_t - y_t|$$

می‌باشد. قضیه دانسکر بیان می‌دارد: $U_n(t) \xrightarrow{d} W(t)$ که در آن $W(t)$ فرآیند وینر (حرکت برآونی) است. (بیلینگزلی³، 1968) اگر $h: C[0, 1] \rightarrow R$ تابعی پیوسته باشد آنگاه

$$h(U_n(t)) \xrightarrow{d} h(W(t)).$$

در برخی موارد ممکن است با توابعی روبرو شویم که دارای ناپیوستگی از نوع اول باشند. با توجه به اینکه قضیه فوق در فضای $C[0, 1]$ بیان شده است در این موارد دچار مشکل خواهیم شد. در این گونه حالت‌ها، فرم دیگری از قضیه دانسکر مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع تصادفی $V_n(t, w)$ تعریف شده به فرم $V_n(t, w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(w)$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که تابع تصادفی $V_n(t, w)$ عضو فضای $D[0, 1]$ (فضایی از توابع X بر روی $[0, 1]$) می‌باشد که از راست پیوسته و دارای حدهای سمت چپ می‌باشد. در این حالت می‌توان نشان داد که $V_n(t) \xrightarrow{d} W(t)$ (بیلینگزلی (1999))

مثال 1.

فرض کنید $h(\omega) = \int_0^1 \omega(t)^k dt$ که $k > 0$ عدد صحیح می‌باشد. $h(\omega)$ تابعی پیوسته است

$$\int_0^1 \left(\frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}\right)^k dt \xrightarrow{d} \int_0^1 W(t)^k dt$$

آزمون مدل AR(1) بدون جمله ثابت

مدل AR(1) به‌ازای $t = 1, 2, \dots, n$ به‌فرم $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ را در نظر بگیرید که در آن $X_0 = 0$ و Z_t فرآیند نوفه سفید گاوسی با میانگین صفر و واریانس σ_Z^2 است. در آزمون $H_0: \phi = 1$ در مقابل $H_1: \phi < 1$ تحت فرض صفر مدل به یک قدم تصادفی تبدیل می‌شود و تحت فرض مقابل سری ایستا است. اگر آزمون بر پایه آماره $\hat{\phi}$ باشد فرض صفر رد می‌شود اگر $\hat{\phi} < 1$ یا $\hat{\phi} - 1 < 0$ باشد.

تحت فرض $H_0: \phi = 1$ داریم:

$$n(\hat{\phi} - 1) = \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^n X_{t-1} Z_t}{n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \xrightarrow{\frac{1}{2} \{[W(1)]^2 - 1\}}{\int_0^1 [w(x)]^2 dx}} \quad (5)$$

و

$$T = \frac{\hat{\phi} - 1}{S_{\hat{\phi}}} = \frac{n(\hat{\phi} - 1)(n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\hat{\sigma}_Z^2)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\frac{1}{2} \{[W(1)]^2 - 1\}}{\{\int_0^1 [w(1)]^2 dx\}^{\frac{1}{2}}}}$$

که در آن $S_{\hat{\phi}} = (\hat{\sigma}_Z^2 (\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2)^{-1})^{\frac{1}{2}}$ و $\hat{\sigma}_Z^2 = \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{\phi} X_{t-1})^2}{n-1}$

چون توزیع حدی $n(\hat{\phi} - 1)$ و T فرم بسته‌ای ندارد و در بعضی مواقع محاسبه جبری انتگرال‌ها امکان‌پذیر نیست. بنابراین چندک‌های این توزیع‌های حدی به‌صورت عددی محاسبه می‌شوند. دیکی² (1979) چندک‌هایی از این توزیع‌های مجانبی را با استفاده از روش مونت کارلو محاسبه کرده است و نتایج را در جدول‌هایی بنام $F(a)$ و $G(a)$ ارائه داده است. با استفاده از این جداول فرض صفر رد می‌شود اگر یافته آماره $n(\hat{\phi} - 1)$ کوچک‌تر از مقدار مشاهده شده در جدول $F(a)$ باشد یا به‌طور مشابه فرض صفر رد می‌شود اگر یافته آماره T کوچک‌تر از مقدار مشاهده شده در جدول $G(a)$ باشد.

در ادامه برخی نتایج را که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز داریم را ارائه می‌دهیم. فرض کنید $Z_t, t = 1, 2, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس σ_Z^2 باشند. قرار دهید $F_n(x) = (1/\sqrt{n}) \sum_{t=1}^{[nx]} Z_t, x \in [0, 1]$ به‌صورت معادل

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nx]} Z_t = \frac{\sqrt{[nx]}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{[nx]}} \sum_{t=1}^{[nx]} Z_t$$

توجه کنید وقتی که $n \rightarrow \infty$ به $\sqrt{[nx]}/\sqrt{n}$ همگرا می‌شود و با پیروی از قضیه حد مرکزی کلاسیک

$$\frac{1}{\sqrt{[nx]}} \sum_{t=1}^{[nx]} Z_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma_Z^2).$$

سپس با استفاده از قضیه اسلوتسکی¹

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nx]} Z_t \xrightarrow{d} \sqrt{x} N(0, \sigma_Z^2).$$

در نتیجه $F_n(x) \xrightarrow{d} \sigma_Z N(0, x)$ بنابراین

$$F_n(x) \xrightarrow{d} \sigma_Z W(x), \quad (1)$$

که این نتیجه همان قضیه دانسکر در یک حالت خاص می‌باشد.

حال فرض کنید $X_t = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_t$ و $X_0 = 0$. با جایگذاری $x = 1$ در رابطه (1) داریم $\frac{X_n}{\sqrt{n}} = F_n(1) \xrightarrow{d} \sigma_Z W(1)$ (1-1) نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n X_{t-1} = \int_0^1 F_n(x) dx \xrightarrow{d} \sigma_a \int_0^1 W(x) dx \quad (2)$$

و

$$n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 = \int_0^1 [F_n(x)]^2 dx \xrightarrow{d} \sigma_a^2 \int_0^1 [W(x)]^2 dx \quad (3)$$

و

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} Z_t \xrightarrow{d} \frac{1}{2} \sigma_a^2 \{[W(1)]^2 - 1\} \quad (4)$$

و

$$T_{\mu} = \frac{\hat{\phi}_{\mu}-1}{S_{\hat{\phi}_{\mu}}} = \frac{n(\hat{\phi}_{\mu}-1)}{(n^2 S_{\hat{\phi}_{\mu}}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{d \frac{1}{2}((W(1))^2-1) - W(1) \int_0^1 W(x) dx}{\left\{ \int_0^1 (W(x))^2 dx - \left(\int_0^1 W(x) dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$S_{\hat{\phi}_{\mu}}^2 = \frac{n \hat{\sigma}_Z^2}{n \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 - (\sum_{t=1}^n X_{t-1})^2}$$

که در آن

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{\alpha} - \hat{\phi}_{\mu} X_{t-1})^2}{n-2}$$

و

مثال 2.

ساختار تصادفی سیر گردش مالی را با استفاده از مشاهدات به دست آمده در طول سالهای 1869 تا 1960 را در نظر می‌گیریم. نلسون و گولد¹ (1974) مدل AR(1) زیر را بر لگاریتم این داده‌ها برازش دادند.

$$\hat{X}_t = 0/0141 + 0/9702 X_{t-1}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0/005$$

که خطای استاندارد برآوردگرها به ترتیب 0/0176 و 0/0199 می‌باشند. بر این اساس داریم

$$(n-1)(\hat{\phi}_{\mu}-1) = 90 \times (0/9702-1)$$

$$= -2/682$$

مقدار حاصل شده کوچک‌تر از مقدار مشاهده شده در جدول F(b) در سطح 5% برای n=50 (-13/3) و n=100 (-13/7) نمی‌باشد بنابراین فرض صفر را رد نمی‌کنیم پس مدل برازش داده شده بر این داده‌ها شامل یک ریشه واحد با $\alpha = 0$ می‌باشد. در مورد آماره T_{μ} نیز داریم

$$T_{\mu} = \frac{\hat{\phi}_{\mu}-1}{S_{\hat{\phi}_{\mu}}} = \frac{0/9702-1}{0/0199} = -1/50$$

که در این قسمت نیز مقدار به دست آمده کوچک‌تر از مقدار مشاهده شده در جدول G(b) در سطح 5% برای n=50 (-2/93) و n=100 (-2/90) نمی‌باشد بنابراین فرض صفر را رد نمی‌کنیم.

توجه کنید از فرض $X_0 = 0$ برای محاسبه راحت‌تر توزیع حدی استفاده کردیم. در تحلیل داده‌های واقعی از رابطه (5) تنها برای $t = 2, 3, \dots, n$ محاسبه می‌شود به عبارت دیگر در برآورد $\hat{\phi}$ تنها از (n-1) مجموع مربعات یا حاصل ضرب استفاده می‌کنیم در نتیجه می‌توانیم آماره آزمون $n(\hat{\phi}-1)$ را با $(n-1)(\hat{\phi}-1)$ جایگزین کنیم. واضح است که برای نمونه‌های بزرگ $n(\hat{\phi}-1)$ با $(n-1)(\hat{\phi}-1)$ رفتار یکسان دارند.

آزمون مدل AR(1) با یک جمله ثابت

در قسمت قبل فرض کردیم که میانگین فرآیند $E(X_t)$ برابر صفر باشد. در اینجا فرض می‌کنیم مدل AR(1) دارای میانگین غیر صفر باشد یعنی $\alpha = \mu(1-\phi)$ که در آن $X_t = \alpha + \phi X_{t-1} + Z_t$

می‌توان مدل فوق را به فرم ماتریسی

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

بازنویسی کرد که

$$Y = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & X_0 \\ \vdots & X_1 \\ 1 & X_{n-1} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \phi \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}$$

می‌دانیم $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ برآورد حداقل مربعات معمولی β است. در نتیجه

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon.$$

چون تحت فرض صفر داریم $\alpha = 0$ ، بنابراین

$$\begin{bmatrix} \sqrt{n}\hat{\alpha} \\ n(\hat{\phi}_{\mu}-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n X_{t-1} \\ n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n X_{t-1} & n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{Z_t}{\sqrt{n}} \\ \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}Z_t}{n} \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{d}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \sigma_z \int_0^1 W(x) dx \\ \sigma_z \int_0^1 W(x) dx & \sigma_z^2 \int_0^1 (W(x))^2 dx \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_z W(1) \\ 1 \\ \frac{2\sigma_z^2 \{(W(1))^2 - 1\}}{2} \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از روابط اثبات شده فوق می‌توان توزیع‌های حدی $n(\hat{\phi}_{\mu}-1)$ و T_{μ} را محاسبه نمود.

$$n(\hat{\phi}_{\mu}-1)$$

$$\rightarrow \frac{d \frac{1}{2}((W(1))^2-1) - W(1) \int_0^1 W(x) dx}{\int_0^1 (W(x))^2 dx - \left(\int_0^1 W(x) dx \right)^2}$$

$$n(\hat{\phi} - 1) = \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^n X_{t-1} Y_t}{n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2} \{[\sigma_Z \Psi(\mathbf{1}) W(\mathbf{1})]^2 - \sigma_Y^2\}}{[\sigma_Z \Psi(\mathbf{1})]^2 \int_0^1 [w(x)]^2 dx}$$

آزمون ریشه واحد برای مدل AR(p)

فرض کنید $F_p(B)X_t = Z_t$ که Z_t فرآیند نوفه سفید گاوسی با میانگین صفر و واریانس σ_Z^2 است و $E(Z_t^4) < \infty$ فرض کنید که

$$F_p(B) = \varphi_{p-1}(B)(1-B)$$

$$\varphi_{p-1}(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p-1} B^{p-1}$$

دارای ریشه‌هایی خارج از دایره واحد باشد. این فرضیات تاکید می‌کنند که

$$\varphi_{p-1}(B)(1-B)X_t = (X_t - X_{t-1}) - \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j (X_{t-j} - X_{t-j-1}) = Z_t$$

بنابراین آزمون ریشه واحد معادل است با آزمون

$$\phi = 1 \text{ در مدل}$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j (X_{t-j} - X_{t-j-1}) + Z_t$$

$$t = p + 1, p + 2, \dots, n$$

با توجه به رابطه 7 داریم

$$n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \xrightarrow{d} (\sigma_Z \Psi(\mathbf{1}))^2 \int_0^1 [W(x)]^2 dx$$

همچنین

$$n^{-1} \sum_{t=p+1}^n X_{t-1} Z_t \xrightarrow{d} \frac{1}{2} \Psi(\mathbf{1}) \sigma_Z^2 \{ (W(\mathbf{1}))^2 - 1 \}$$

آماره‌های مربوط به آزمون ریشه واحد برای مدل

AR(p) و توزیع‌های حدی مربوط به این آماره‌ها با

توجه به روابط فوق عبارتند از

$$n(\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2} \Psi(\mathbf{1}) \sigma_Z^2 \{ [W(\mathbf{1})]^2 - 1 \}}{[\sigma_Z \Psi(\mathbf{1})]^2 \int_0^1 [w(x)]^2 dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \{ [W(\mathbf{1})]^2 - 1 \}}{\Psi(\mathbf{1}) \int_0^1 [w(x)]^2 dx}$$

آزمون ریشه واحد در حالت کلی

در این حالت برای آزمون ریشه واحد مدل

$$X_t = \phi X_{t-1} + Y_t \text{ که } Y_t \text{ یک فرآیند ایستا ولی نوفه سفید نباشد. تحت فرض ریشه}$$

واحد مدل به قدم تصادفی به فرم $(1-B)X_t = Y_t$ کاهش می‌یابد یعنی $X_t = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + X_0$.

در این بخش فرض می‌کنیم که Y_t یک فرآیند خطی بفرم $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j} = \Psi(B)Z_t$ باشد که در آن

$$\sum_{j=0}^{\infty} j |\Psi_j| < \infty, \Psi_0 = 1, \Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j$$

تحت فرض $H_0: \phi = 1$ داریم

$$n(\hat{\phi} - 1) = \frac{(n^{-1} \sum_{t=1}^n X_{t-1} Y_t)}{(n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2)}$$

همچنین می‌توان نشان داد که

$$X_t = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t + X_0 = \Psi(\mathbf{1})(Z_t + Z_{t-1} + \dots + Z_1) + T_t - T_0 + X_0$$

که در آن

$$\Psi(\mathbf{1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j,$$

$$T_t = - \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{j+1+i}) Z_{t-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i Z_{t-i}$$

حال قرار دهید

$$H_n(x) = (1/\sqrt{n}) \sum_{t=1}^{[nx]} X_t, \quad x \in [0,1].$$

بنابراین

$$H_n(x) \xrightarrow{d} \sigma_Z \Psi(\mathbf{1}) W(x)$$

مشابه مثال 4-1 نتیجه می‌گیریم که

$$n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n X_{t-1} = \int_0^1 H_n(x) dx \xrightarrow{d} \sigma_Z \Psi(\mathbf{1}) \int_0^1 W(x) dx \quad (6)$$

و

$$n^{-2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 = \int_0^1 [H_n(x)]^2 dx \xrightarrow{d} (\sigma_Z \Psi(\mathbf{1}))^2 \int_0^1 [W(x)]^2 dx \quad (7)$$

و

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n X_{t-1} Y_t \xrightarrow{d} \frac{1}{2} [\sigma_Z \Psi(\mathbf{1}) W(\mathbf{1})]^2 - \frac{1}{2} \sigma_Y^2. \quad (8)$$

با توجه به روابط فوق توزیع حدی $n(\hat{\phi} - 1)$

عبارت است از :

$$(n-p)(\hat{\phi}-1)\Psi(1) = 95 \times (1/002 - 1) \\ \times \frac{1}{1.2834} = 0/1480$$

مقدار حاصل شده کوچکتر از مقدار مشاهده شده در جدول $F(a)$ در سطح 5% برای $n=50$ و $(-7/7)$ و $n=100$ نمیباشد بنابراین فرض صفر را رد نمیکنیم پس مدل برازش داده شده بر این دادهها شامل یک ریشه واحد با $\alpha = 0$ می باشد.

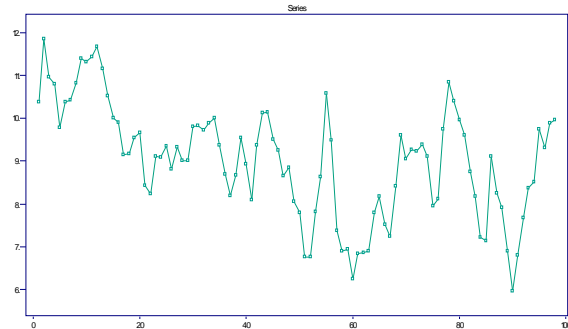
$$T = \frac{\hat{\phi}-1}{S_{\hat{\phi}}} = \frac{n(\hat{\phi}-1)[n^{-2}\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2]^{-\frac{1}{2}}}{(\hat{\sigma}_Z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{n^{-1}\sum_{t=1}^n X_{t-1}Z_t}{[n^{-2}\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2]^{-\frac{1}{2}}(\hat{\sigma}_Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d}{\rightarrow} \frac{\frac{1}{2}\Psi(1)\sigma_Z^2\{[W(1)]^2-1\}}{\{[\sigma_Z\Psi(1)]^2 \int_0^1 [w(x)]^2 dx\}^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{\frac{1}{2}\sigma_Z\{[W(1)]^2-1\}}{\{\int_0^1 [w(x)]^2 dx\}^{\frac{1}{2}}}$$

مشابه آنچه در قسمت‌های قبل بیان شد اگر X_t , $t = p+1, \dots, n$ مشاهده شده باشد می‌توانیم از $n(\hat{\phi}-1)\Psi(1)$ به جای $(n-p)(\hat{\phi}-1)\Psi(1)$ استفاده کنیم.

مثال 3.

داده‌های مربوط به سطح دریاچه Huron از سال 1871 تا 1984 را در نظر می‌گیریم. این داده‌ها در شکل 1-6 ترسیم شده‌اند.



شکل 1. داده‌های سطح دریاچه

برکول و دیویس¹ (2002) مدل $AR(2)$ زیر را بر این داده‌ها برازش دادند.

$$\widehat{X}_t = 1/002 X_{t-1} - 0/2834 X_{t-2}$$

در اینجا داریم

$$\Psi(B) = \frac{1}{\varphi_{p-1}(B)} = \frac{1}{1+0/2834B^2}$$

$$\Psi(1) = \frac{1}{1/2834}$$

References

- Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability Measures*, 2nd Edition. Wiley, New York.
- Brockwell, P.J and Davis, R.A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*, Second Edition, 2nd Edition, New York.
- Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *J. Amer. Statist. Assoc.* 74, 427–431.
- Donsker, M.D. (1951). An invariance principle for certain probability limit theorems. *Mem. Amer. Math. Soc.* 6, 1–12.
- Gould, J.P. and C.R. Nelson. (1974). The Stochastic Structure of the Velocity of Money, *American Economic Review*, 64, 405-418.
- Wei, William W.S. (2006) *Time series analysis: univariate and multivariate methods*, 2nd Edition, Pearson, Addison Wesley.