Statistical Sciences Extension
Vol. 2, No. 2, Spring & Summer 2017, (P 51-56)

گسترۀ علوم آماری
سال دوم، شماره دوم، بهار و تابستان ۱۳۹۶، (ص ۵۱-۵۶)

اثبات جدیدی از اتحاد دی بروئین در کانال‌های نوفه تجمعی نرمال با مؤلفه‌های مستقل

عباس پاک*[۱]، ایمان مخدوم[۲]
۱. استادیار، گروه آمار، دانشگاه شهرکرد
۲. استادیار، گروه آمار، دانشگاه پیام نور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۱۶ **تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۷/۰۱/۲۳

An Alternative Proof of de Bruijn’s Identity for Additive Gaussian Noise Channels with Independent Component

A. Pak*[1], I. Makhdoom[2]
1. Assistant Professor, Department of Statistics, Shahrekord University
2. Assistant Professor, Department of Statistics, Payame Noor University

Received: 2017/11/07 **Accepted:** 2018/04/12

Abstract
Additive noise channels are the most commonly used channels in signal processing. In these channels the received signal, random variable Y, is composed of a transmitted signal, random variable X, and an additive noise, random variable Z. One of the important problems studied on the received signal is the entropy of random variable Y. When additive noise Z is an independent Gaussian random variable with zero mean and unit variance, the elegant algebraic connection between differential entropy of output signal Y and Fisher information is stated through a relation known as the De Bruijn’s identity. In this paper, we first obtain a general relation for differentials of conditional distribution of output signal and use it to prove the relationship between the first derivative of differential entropy of output signal and its Fisher information. This method can be used for extending De Bruijn’s identity when the additive noise is distributed as another useful statistical distributions.

Keywords
Additive Noise Channels, Differential Entropy, Gaussian Distribution, Fisher Information.

چکیده
کانال‌های نوفه تجمعی از جمله مهم‌ترین کانال‌های مخابراتی هستند که در مسائل پردازش سیگنال‌ها بسیار بدان‌ها توجه شده است. سیگنال دریافتی (متغیر تصادفی Y) در این کانال‌ها به صورت مجموع یک سیگنال ارسال شده از مبدأ (متغیر تصادفی X) و نوفه تحمیل شده بر آن (متغیر تصادفی Z) است. یکی از مسائلی که دربارۀ سیگنال دریافتی مطرح است، آنتروپی متغیر تصادفی Y است. در صورتی که متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد بوده و مستقل از سیگنال ارسالی X باشد، ارتباط جبری بین آنتروپی و اطلاع فیشر متغیر تصادفی Y در رابطه‌ای تحت عنوان برابری دی‌بروئین بیان می‌شود. در این مقاله ابتدا یک رابطه کلیدی برای توزیع شرطی سیگنال دریافتی Y به دست آمده و با استفاده از آن، رابطه بین مشتق اول آنتروپی تفاضلی Y و اطلاع فیشر آن ارائه شده است. روش یاد شده در اثبات حاضر می‌تواند برای ارائه توسیع‌های مختلفی از برابری دی بروئین در حالتی که نوفه تحمیلی Z دارای توزیع‌های پرکاربرد دیگر آماری باشد، به کار رود.

واژگان کلیدی
کانال نوفه تجمعی، آنتروپی تفاضلی، توزیع نرمال، اطلاع فیشر.

*Corresponding Author: abbas.pak1982@gmail.com

*** نویسنده مسئول:** عباس پاک

مقدمه

یکی از مواردی که در نظام‌های ارتباطی مطرح است، بحث مربوط به کانال‌های مخابراتی است. کانال مخابراتی[1] به محیطی گفته می‌شود که از آن برای انتقال اطلاعات از یک فرستنده به یک گیرنده استفاده می‌شود. هدف اصلی یک سیستم مخابراتی الکتریکی، انتقال پیام توسط یک کانال مخابراتی و با استفاده از شکل موج‌های الکتریکی است. این شکل موج‌ها در اکثر موارد غیرقابل پیش‌بینی هستند؛ زیرا اگر شکل موج دقیقاً قابل پیش‌بینی (یعنی غیر تصادفی) باشد، در این صورت ارسال آن غیر ضروری خواهد بود. با این مفهوم، به ویژه از نقطه‌نظر گیرنده، تمام سیگنال‌های پیام معنادار، تصادفی هستند. تصادفی بودن آنها بدین دلیل است که گیرنده از قبل نمی‌داند که کدام یک از شکل موج‌های متنوع پیام قرار است ارسال شود. در مسیر انتقال اطلاعات نیز تأثیرات مزاحم مختلفی مانند نوفه[2] در مسیر ارسال سیگنال انباشته می‌شوند و باعث تغییر شکل سیگنال می‌شوند. این نوفه یکی از محدودیت‌های اساسی سیستم را تشکیل می‌دهد و هنگامی که روی یک سیگنال حاوی اطلاعات تحمیل می‌شود، ممکن است که قسمتی از پیام مختل شود یا اینکه پیام از بین برود. کانال‌های نوفه تجمعی[3] از جمله مهم‌ترین کانال‌های مخابراتی هستند که در مسائل پردازش سیگنال‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. اگر سیگنال ارسال شده در مبدأ متغیر تصادفی X و نوفه تحمیل شده بر آن متغیر تصادفی Z باشد، آنگاه سیگنال دریافتی در مقصد، متغیر تصادفی Y به صورت زیر خواهد بود:

$$Y = X + tZ, \qquad (۱)$$

که در آن $t = \dfrac{1}{\sqrt{SNR}}$ و SNR نسبت سیگنال به نوفه[4] است. در پردازش سیگنال‌ها، بسیاری از ویژگی‌های سیگنال دریافتی Y مانند توزیع سیگنال، آنتروپی و اطلاع فیشر سیگنال و اطلاع متقابل متغیرهای تصادفی X و Y بررسی می‌شوند.

آنتروپی متغیر تصادفی پیوسته Y با تابع چگالی احتمال $f_Y(y;t)$ به صورت

$$h(Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y;t)\log f_Y(y;t)dy, \qquad (۲)$$

تعریف می‌شود. $h(Y)$ میزان عدم حتمیت متغیر تصادفی Y و به تعبیر دیگر مقدار متوسط اطلاعاتی که برای توصیف متغیر تصادفی Y مورد نیاز است را نشان می‌دهد. آنتروپی یک متغیر تصادفی پیوسته را آنتروپی تفاضلی نیز می‌گویند.

اطلاع فیشر متغیر تصادفی پیوسته Y به صورت

$$J_t(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y;t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\log f_Y(y;t)\right)^2 dy, \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود که میزان اطلاع موجود در متغیر تصادفی Y درباره پارامتر t را بیان می‌کند. اگرچه اطلاع فیشر به صورت تعریف شده در رابطه (۳) کاربرد بسیاری در آمار ریاضی دارد، یک تعریف خاص‌تر از آن در نظریه اطلاع استفاده شده است که در ادامه آن را بیان می‌کنیم.

فرض کنید که پارامتر t یک پارامتر مرکزی توزیع Y باشد. آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial t} f_Y(y-t;t) = -\frac{\partial}{\partial y} f_Y(y-t;t)$$

بنابراین عبارت داده شده در طرف راست رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y;t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\log f_Y(y;t)\right)^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y-t;t)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\log f_Y(y-t;t)\right)^2 dy$$

بنابراین با تعریف $\tilde{Y} = Y - t$ رابطه

$$J(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tilde{Y}}(\tilde{y};t)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\log f_{\tilde{Y}}(\tilde{y};t)\right)^2 d\tilde{y},$$

را نیز می‌توان برای محاسبه اطلاع فیشر متغیر تصادفی Y به کار برد که به آن اطلاع فیشر نسبت به پارامتر مرکزی t گفته می‌شود.

در مدل‌های نوفه تجمعی، ارتباط جبری بین آنتروپی و اطلاع فیشر سیگنال دریافتی در رابطه‌ای با عنوان برابری دی‌بروئین بیان شده است. استم در سال (۱۹۵۹) برابری دی‌بروئین را معرفی کرده و از آن برای به دست آوردن یک

---
1. Communication channel
2. Noise
3. Additive noise channels
4. Signal-to-Noise Ratio

کران پایین برای ظرفیت کانال‌های نوفه تجمعی استفاده کرد. همچنین یک حالت انتگرالی از این برابری توسط بارون (۱۹۸۶) به دست آمده است که برای اثبات آن فقط قید وجود گشتاور دوم متناهی متغیر X نیاز است. کوستا و کاور (۱۹۸۴) نیز برابری دی‌بروئین را در حالت برداری اثبات کرده‌اند. جانسون و سوهو (۲۰۰۱) با در نظر گرفتن کانال‌های تجمعی با نوفه نرمال غیر استاندارد ارتباط بین مشتق آنتروپی سیگنال دریافتی و اطلاع فیشر را به دست آوردند. پایارو و ژولمار (۲۰۰۹) و ریول (۲۰۱۱) اثبات‌های متفاوت و جدیدی از برابری دی‌بروئین را ارائه کرده‌اند.

در ادبیات تحقیق، کاربردهای بسیاری از برابری دی‌بروئین ارائه شده است. به عنوان مثال لینیک (۱۹۶۹) با استفاده از بسط تیلور سیگنال دریافتی و برابری دی‌بروئین، نتایجی را در نظریه برآوردیابی به دست آورده است. بسط‌های مشابهی نیز توسط پریلو (۱۹۷۰) و پینسکر (۱۹۹۸) برای محاسبهٔ ظرفیت کانال‌های نوفه تجمعی نرمال و غیرنرمال ارائه شده است. فام (۲۰۰۵)، فام و ورینز (۲۰۰۵) و ورینز و همکاران (۲۰۰۷) بسط‌های مرتبه اول و دوم آنتروپی را برای کانال‌های نوفه تجمعی نرمال و غیرنرمال به دست آورده و با استفاده از آنها برابری دی‌بروئین را اثبات کردند. گو و همکاران (۲۰۰۵) نیز روابط مشابهی را برای اطلاع متقابل در کانال‌های تجمعی غیرنرمال ارائه کرده و برابری دی‌بروئین را به عنوان یک حالت خاص به دست آوردند. اخیراً، برابری دی‌بروئین بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته است. جانسون (۲۰۱۳) با استفاده از توابع امتیاز جدیدی که برای متغیرهای تصادفی تعریف کرده، تعمیم جدیدی از برابری دی‌بروئین را ارائه کرد و ارتباط بین این تعمیم‌ها را با میانگین مربعات خطای برآوردگرها در کانال‌های نوفه تجمعی به دست آورد. خولنجانی و علامت‌ساز (۲۰۱۶) تعمیم برابری دی‌بروئین در کانال‌های نوفه تجمعی با مؤلفه‌های وابسته را به دست آوردند.

هدف اصلی ما در این مقاله ارائه یک روش اثبات جدید برای اتحاد دی‌بروئین است برای این منظور ابتدا یک رابطه کلیدی را برای توزیع شرطی سیگنال دریافتی Y به دست آورده و با استفاده از آن، رابطه بین مشتق اول آنتروپی تفاضلی Y و اطلاع فیشر آن را ارائه می‌کنیم. با استفاده از ایده کلی ارائه شده در روش اثبات بالا می‌توان تعمیم‌های جدیدی از رابطه دی‌بروئین در حالت‌های مختلف را بیان کرد؛ به عنوان مثال برابری دی‌بروئین می‌تواند در مواردی که نوفه تحمیلی Z دارای توزیع‌های ریلی، وایبل و یا گاما باشد، از نو بنا شده و رابطه بین آنتروپی تفاضلی و اطلاع فیشر Y بیان شود.

برابری دی بروئین در کانال‌های نوفه تجمعی نرمال

یک مدل نوفه تجمعی به صورت $Y = X + tZ$ را در نظر بگیرید که در آن متغیرهای تصادفی پیوسته X و Z دارای چگالی احتمال توأم $f_{X,Z}(x,z)$ باشند. در این صورت داریم

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{X,Z}(x, \frac{y-x}{\sqrt{t}}). \qquad (۴)$$

بنابراین توزیع شرطی سیگنال دریافتی Y به شرط سیگنال ارسال شده X به صورت

$$f_{Y|X}(y \mid x;t) = \frac{f_{X,Z}(x, \frac{y-x}{\sqrt{t}})}{\sqrt{t}\, f_X(x)}, \qquad (۵)$$

است که با استفاده از آن می‌توان تابع چگالی احتمال Y را به فرم

$$f_Y(y;t) = E_X[\, f_{Y|X}(y \mid X;t)] \qquad (۶)$$

نوشت. در ادامه رابطه‌ای را برای توزیع شرطی $f_{Y|X}$ بیان می‌کنیم که نقش کلیدی در اثبات نتیجه اصلی بحث شده در این بخش دارد.

لم ۱: فرض کنید در کانال نوفه تجمعی $Y = X + tZ$، متغیر تصادفی X و Z مستقل از یکدیگر بوده و Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{Y|X}(y \mid x;t) = -\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial y}\left((y-x)\, f_{Y|X}(y \mid x;t)\right). \qquad (۷)$$

اثبات: با توجه به اینکه X و Z مستقل از یکدیگر هستند، توزیع شرطی سیگنال دریافتی Y را می‌توان به صورت

$$f_{Y|X}(y \mid x;t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_Z\left(\frac{y-x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}(y-x)^2\right) \qquad (۸)$$

نوشت. با استفاده از رابطه (۸) مشتق اول تابع شرطی $f_{Y|X}$ نسبت به y و t به ترتیب برابر می‌شود با

$$\frac{\partial}{\partial y} f_{Y|X}(y|x;t) = -\frac{1}{t}(y-x) f_{Y|X}(y|x;t)$$

و

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} & f_{Y|X}(y|x;t) \\ &= -\frac{1}{2t} f_{Y|X}(y|x;t) \\ &\quad + \frac{1}{2t^2}(y-x)^2 f_{Y|X}(y|x;t).\end{aligned}$$

بنابراین مشتق تابع شرطی $f_{Y|X}$ نسبت به t می‌تواند به صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_{Y|X}(y|x;t) &= -\frac{1}{2t} f_{Y|X}(y|x;t) \\ &\quad -\frac{1}{2t}(y-x)\frac{\partial}{\partial y} f_{Y|X}(y|x;t) \\ &= -\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial y}\big((y-x) f_{Y|X}(y|x;t)\big)\end{aligned}$$

بازنویسی شود.

قضیه ۲ (برابری دی‌بروئین):

کانال نوفه تجمعی $Y = X + tZ$ را در نظر بگیرید که در آن متغیر تصادفی X دارای گشتاور دوم متناهی بوده و متغیر تصادفی Z مستقل از سیگنال ارسالی X و دارای توزیع نرمال استاندارد باشد؛ آنگاه مشتق اول آنتروپی تفاضلی Y می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} h(Y) = \frac{1}{2} J(Y). \tag{۹}$$

اثبات: ابتدا با توجه به رابطه (۲) مشتق آنتروپی سیگنال دریافتی Y نسبت به t برابر می‌شود با

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} h(Y) = & \\ & -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\log f_Y(y;t)\, f_Y(y;t)dy \\ & -\int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t)\frac{\partial}{\partial t} f_Y(y;t)dy \\ = & -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} f_Y(y;t)dy \\ & -\int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t)\frac{\partial}{\partial t} f_Y(y;t)dy.\end{aligned} \tag{۱۰}$$

اما تحت شرایط نظم (لهمن، ۱۹۹۸) داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} f_Y(y;t)dy = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y;t)dy = 0.$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌های (۶) و (۱۰) مشتق آنتروپی Y برابر می‌شود با

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} & h(Y) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t)\frac{\partial}{\partial t} f_Y(y;t)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t)\frac{\partial}{\partial t} E_X[f_{Y|X}(y|X;t)]dy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t) E_X[\frac{\partial}{\partial t} f_{Y|X}(y|X;t)]dy\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که با استفاده از رابطه (۷) می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} & h(Y) \\ &= \frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t) \\ &\qquad \times E_X[\frac{\partial}{\partial y}(y-X) f_{Y|X}(y|X;t)]dy \\ &= \frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t) \\ &\qquad \times \frac{\partial}{\partial y} E_X[(y-X) f_{Y|X}(y|X;t)]dy.\end{aligned} \tag{۱۲}$$

دقت کنید که در رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) جای مشتق و انتگرال تعویض شده است که دلیل آن در پیوست توضیح داده شده است. اکنون با انتگرال‌گیری جزء به جزء نسبت به Y رابطه (۱۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t} & \int_{-\infty}^{\infty} \log f_Y(y;t) \\ & \quad \times \frac{\partial}{\partial y} E_X[(y-X) f_{Y|X}(y|X;t)]dy \\ = & \frac{1}{2t}\log f_Y(y;t) \\ & \quad \times E_X[(y-X) f_{Y|X}(y|X;t)]\big|_{y=-\infty}^{\infty} \\ & -\frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}\log f_Y(y;t)\right) \\ & \quad \times E_X[(y-X) f_{Y|X}(y|X;t)]dy.\end{aligned} \tag{۱۳}$$

اما قسمت اول سمت راست رابطه فوق را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}&\log f_Y(y;t)E_X[(y-X)\,f_{Y|X}(y\,|\,X;t)]|_{y=-\infty}^{\infty}\\&=2y\sqrt{f_Y(y;t)}\sqrt{f_Y(y;t)}\log\sqrt{f_Y(y;t)}\,|_{y=-\infty}^{\infty}\\&\quad-\log f_Y(y;t)E_X[Xf_{Y|X}(y\,|\,X;t)]|_{y=-\infty}^{\infty}\,.\end{aligned} \tag{۱۴}$$

بازنویسی کرد. اما با استفاده از رابطه (۶) داریم:

$$\lim_{y\to\pm\infty} y\sqrt{f_Y(y;t)}=0.$$

از طرفی اگر y به بی‌نهایت میل کند، با توجه به رابطه $\lim_{u\to 0} u\log u=0$، می‌توان نوشت

$$\lim_{y\to\pm\infty}\sqrt{f_Y(y;t)}\log\sqrt{f_Y(y;t)}=0.$$

همچنین عبارت دوم طرف راست رابطه (۱۴) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}&\log f_Y(y;\gamma)E_X[Xf_{Y|X}(y\,|\,X;\gamma)]|_{y=-\infty}^{\infty}\\&=\underbrace{\frac{E_X[Xf_{Y|X}(y\,|\,X;\gamma)]}{\sqrt{f_Y(y;\gamma)}}}_{c_1}\\&\quad\times 2\sqrt{f_Y(y;\gamma)}\log\sqrt{f_Y(y;\gamma)}\Big|_{y=-\infty}^{\infty}.\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با استفاده از (۶) و (۸) به راحتی دیده می‌شود که فاکتور c_1 کران‌دار است. بنابراین سمت راست رابطه (۱۵) برابر صفر خواهد بود و بنابراین از رابطه (۱۳) داریم

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}h(Y)\\&=-\frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}\log f_Y(y;t)\right)\\&\quad\times E_X[(y-X)\,f_{Y|X}(y\,|\,X;t)]dy\end{aligned}$$

که با استفاده از (۷) می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}h(Y)\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}\log f_Y(y;t)\right)\\&\quad\times\frac{\partial}{\partial y}E_X[\,f_{Y|X}(y\,|\,X;t)]dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}f_Y(y;t)\right)^2\frac{1}{f_Y(y;t)}dy\\&=\frac{1}{2}j(Y)\end{aligned}$$

و اثبات پایان می‌یابد.

بحث و نتیجه‌گیری

اتحاد دی‌بروئین یکی از مهم‌ترین روابطی است که در پردازش آماری سیگنال‌های مخابراتی بسیار به آن توجه شده است. در این مقاله، روش اثبات جدیدی برای اتحاد دی‌بروئین ارائه و آنتروپی تفاضلی سیگنال دریافتی به صورت تابعی از اطلاع فیشر بیان شد. اهمیت ارائه روش اثبات بالا برای رابطه دی‌بروئین در این است که با استفاده از ایده ارائه شده در آن می‌توان تعمیم‌های جدیدی از رابطه دی‌بروئین در حالت‌های مختلف را ارائه کرد؛ به عنوان مثال تعمیم برابری دی‌بروئین با استفاده از توابع مفصل می‌تواند ایده‌ای برای مطالعات بعدی باشد.

پیوست

در اثبات‌های این مقاله در رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) جای مشتق و انتگرال تعویض شده است. یک توجیه منطقی برای چنین تغییراتی استفاده از قضیه همگرایی مغلوب است. ابتدا با توجه به مشتق تابع شرطی $f_{Y|X}$ نسبت به y و t داریم:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial}{\partial y}f_{Y|X}(y\,|\,x;t)\right|\\&=\left|-\frac{1}{t\sqrt{2\pi t}}(y-x)\exp\left(-\frac{1}{2t}(y-x)^2\right)\right|\\&\le\frac{1}{t\sqrt{2\pi t}}|y-x|\end{aligned} \tag{۱۶}$$

و

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial}{\partial t}f_{Y|X}(y\,|\,x;t)\right|=\\&\quad\left|(-\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t^2}(y-x)^2)\right|\\&\quad\times\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{1}{2t}(y-x)^2\right)\right|\\&\le\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t^2}(y-x)^2\right).\end{aligned} \tag{۱۷}$$

اکنون با استفاده از (۱۶) و (۱۷) می‌توان نوشت

$$E_X\left[\frac{1}{t\sqrt{2\pi}}|y-x|\right] = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}}E_X\left[|y-x|\right]$$

و

$$E_X\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t^2}(y-x)^2\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t^2}E_X[(y-x)^2]\right).$$

بر اساس صورت قضیه ۲، گشتاور دوم متغیر تصادفی X متناهی است. بنابراین امیدهای ریاضی بالا وجود دارند و بر این اساس می‌توان گفت تعویض ترتیب انتگرال و مشتق به صورت

$$\frac{\partial}{\partial y}E_X[f_{Y|X}(y\,|\,X;\gamma)] = E_X[\frac{\partial}{\partial y}f_{Y|X}(y\,|\,X;\gamma)]$$

و

$$\frac{\partial}{\partial t}E_X[f_{Y|X}(y\,|\,X;\gamma)] = E_X[\frac{\partial}{\partial t}f_{Y|X}(y\,|\,X;\gamma)]$$

امکان‌پذیر است.

References

Barron, A.R. (1986). "Entropy and the central limit theorem." *The Annals of Probability,* 14(1), 336-342.

Costa, M.H.M. and Cover, T.M. (1984). "On the similarity of the entropy power inequality and the Brunn-Minkowski inequality." *IEEE Transactions on Information Theory*, 30(6), 837-839.

Guo, D., Shamai, (Shitz) S., and Verdu, S. (2005). "Additive non-Gaussian noise channels: mutual information and conditional mean estimation." *in Proceedings IEEE International Symposium on Information Theory*, pp. 719-723.

Johnson, O. (2013). "A de Bruijn identity for symmetric stable laws." see http://arxiv.org/pdf/1310.2045v1.pdf.

Johnson, O. and Suhov, Y. (2001). "Entropy and random vectors." Journal of Statistical Physics, 104(112), 145-165.

Khoolenjani, N.B. and Alamatsaz, M.H. (2016). "A De Bruijn's identity for dependent random variables based on copula theory." Probability in the Engineering and Informational Sciences, 30(1), 125-140.

Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). Theory of Point Estimation, 2nd ed, Springer, New York.

Linnik, Y.V. (1959). "An information-theoretic proof of the central limit theorem with the Lindeberg condition." Theory of Probability and its Applications, 4(3), 288-299.

Payaro, M. and Palomar, D.P. (2009). "Hessian and concavity of mutual information, differential entropy, and entropy power in linear vector Gaussian channels." IEEE Transactions on Information Theory, 55(8), 3613-3628.

Pham, D.T. (2005). "Entropy of a variable slightly contaminated with another." IEEE Signal Processing Letters, 12(7), 536-539.

Pham, D.T. and Vrins, F. (2005). "Local minima of information-theoretic criteria in blind source separation." IEEE Signal Processing Letters, 12(11), 788-791.

Pinsker, M.S., Prelov, V.V. and Meulen, E.C. (1998). "Information rates in certain stationary non-Gaussian channels in weak-signal Transmission." Problems of Information Transmission, 34(1), 1-13.

Prelov, V.V. (1970). "Asymptotic behavior of the capacity of a continuous channel with a large amount of noise." Problems of Information Transmission, 6(2), 122-135.

Rioul, O. (2011). "Information theoretic proofs of entropy power inequalities." IEEE Transactions on Information Theory, 57(1), 33-55.

Stam, A. J. (1959). "Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon." Information and Control, 2(2), 101-112.

Vrins, F., Pham, D.T. and Verleysen, M. (2007). "Mixing and non-mixing local minima of the entropy contrast for blind source separation." IEEE Transactions on Information Theory, 53(3), 1030-1042.