گسترهٔ علوم آماری
سال دوم، شماره دوم، بهار و تابستان ۱۳۹۶، (ص ۴۱-۵۰)

Statistical Sciences Extension
Vol. 2, No. 2, Spring & Summer 2017, (P 41-50)

معرفی یک برآوردگر جدید برای برآورد میانگین جامعه (داده‌های دارای خطای اندازه‌گیری)

لیدر نوایی*[۱]، رقیه دیانیان[۲]
۱.استادیار، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ایران
۲.کارشناس ارشد ،گروه کامپیوتر، دانشگاه پیام نور، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۶/۲۸ **تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۶/۱۱/۰٤

Introducing a New Estimator for Estimating the Population Mean in the Persence of Measurement Errors

L. Navaei*[1], R. Dayanian[2]
1. Assistant Professor, Departement of Statistics, Payam Noor University
2. MSc, Departement of Computer Sciences, Payam Noor University

Received: 2016/09/18 **Accepted**: 2018/01/24

چکیده
در این مقاله مسئله برآورد میانگین جامعه زمانی که داده ها دارای خطای اندازه‌گیری هستند و همچنین یک روش جدید برآورد میانگین جامعه زمانی‌که داده‌های نمونه‌گیری دارای خطای اندازه‌گیری هستند، ارائه شده است. در این مقاله یک براورد کننده جدید معرفی و از لحاظ تئوری و عملی نسبت به سایر برآوردکننده‌ها مقایسه می‌شود. همچنین کارایی برآوردکننده جدید، نسبت به سایر برآوردکننده‌های موجود را نشان داده و در اخر این نتایج برای داده‌های واقعی به کار برده می‌شود.

واژگان کلیدی
اریبی، برآوردگر نمایی، خطای اندازه‌گیری، متغیرکمکی، میانگین مربع خطا.

Abstract
In this paper we study the problem of estimation of population mean in the presence of measurement error simultaneously using information on a single auxiliary variable. We have developed a new estimator of population mean and compared it with some existing estimators under the situations when measurement errors occur simultaneously. The proposed estimators are theoretically compared with existing estimators. Empirical and simulation study is also conducted to assess the performance of proposed estimator.

Keywords
Auxiliary Variable, Bias, Exponential Estimator, Mean Square Error, Measurement Error.

***نویسنده مسئول:** لیدر نوایی
*Corresponding Author: leadernavaei@yahoo.com

مقدمه

در بررسی‌های نمونه‌ای، پارامترهای جامعه بر اساس داده‌های گردآوری شده، برآورد می‌شوند. روش‌های مختلف برآورد تحت این فرض که مشاهدات گردآوری‌شده صحیح و بدون خطای اندازه‌گیری هستند، استفاده می‌شوند. اگر چه این فرض در بسیاری از موارد کاربردی، رضایت‌بخش نیست و داده‌ها با خطاهای اندازه‌گیری، نظیر خطاهای گزارش و خطاهای محاسباتی همراه هستند و این خطاهای اندازه‌گیری نتایج را نامعتبر می‌کنند.

یکی از عمده‌ترین خطاهایی که در هر آمارگیری ممکن است رخ دهد، خطای اندازه‌گیری است. خطای اندازه‌گیری، تفاوت مقدار به‌دست آمده یا همان مقدار مشاهده شده با مقدار واقعی متغیر تحت بررسی است که با انجام اندازه‌گیری روی واحدهای نمونه رخ می‌دهد. مجموعه اطلاعات ارائه شده توسط پاسخ‌دهندگان اغلب کمتر یا بیشتر گزارش می‌شود و پژوهشگر با مسئلهٔ خطای اندازه‌گیری، هنگام گردآوری داده‌ها از افراد مواجه است. خطای اندازه‌گیری ممکن است ناشی از عوامل زیر باشد:

الف) نقص در ابزار آمارگیری؛

ب) ارائهٔ عمدی اطلاعات نادرست توسط پاسخگویان؛

ج) ارائهٔ غیرعمدی اطلاعات نادرست توسط پاسخگویان؛

د) تأثیر آمارگیر بر پاسخ‌های ارائه شده توسط پاسخگویان.

در طول چند دههٔ گذشته، آماردانان علاقه‌مند به مسئلهٔ برآورد پارامترهای جامعه، با وجود خطاهای اندازه‌گیری (یا پاسخ) بودند. ککران[1] اثر خطاهای اندازه‌گیری را روی برآوردهای کمترین مربعات معمولی ضرایب رگرسیون مطالعه کرد و پی برد که خطاهای اندازه‌گیری ممکن است به برآوردهای ناسازگار و نااریب از ضرایب رگرسیون منجر شوند. شالب[2] [۵] برآوردگر نسبتی کلاسیک میانگین جامعه را با وجود خطاهای اندازه‌گیری بررسی کرد. مانیشا[3] و سینگ[4] [۴] اثر خطاهای اندازه‌گیری را روی یک برآوردگر جدید که ترکیبی خطی از برآوردگر نسبتی کلاسیک و میانگین نمونه بود، بررسی کردند. دیواکار شوکلا[5] و همکارانش [۶] برآوردگر جدیدی را برای میانگین جامعه معرفی کردند که ترکیبی خطی از برآوردگر سریون کاترمن و میانگین نمونه بود. مسئله خطای اندازه‌گیری همچنین توسط سینگ و کارپ[6] [۷]، کومار[7] و همکارانش [۳] و غیره بررسی شده است. به علاوه، بسیاری از همکاری‌های مفید دیگر، ادامهٔ کارها و مدل‌های خطای اندازه‌گیری ارائه شده توسط فولر[8] [۲] هستند.

در این مقاله، پس از معرفی چند نماد در بخش ۲، برخی از برآوردگرهای موجود برای میانگین جامعه، یعنی برآوردگر نسبتی شالب [۵]، برآوردگر مانیشا و سینگ [۴] و برآوردگر شوکلا و همکارانش [۶] را که مبتنی بر برآوردگر نسبتی کلاسیک و میانگین نمونه هستند، با وجود خطای اندازه‌گیری بررسی شده و ویژگی‌های آن‌ها، یعنی اریبی و میانگین مربع خطا بحث شده است. در بخش ۳ برآوردگر جدیدی معرفی و ویژگی‌های آن، یعنی اریبی و میانگین مربع خطا بحث شده است. در بخش ۴ برآوردگر جدید با دیگر برآوردگرهای یاد شده علیرغم وجود خطای اندازه‌گیری مقایسه و شرایط کارایی بر اساس میانگین مربع خطا نتیجه‌گیری شده است. همچنین این نتایج را در داده‌های واقعی به کار برده و درستی نتایج را در مقایسه‌های عددی و شبیه‌سازی شده مشاهده کرده‌ایم.

نمادگذاری و مروری بر برآوردکننده‌های پیشین

جامعه‌ای متناهی به حجم N را در نظر بگیرید که یک نمونه تصادفی ساده به حجم n بدون جایگذاری از آن انتخاب شده است. فرض کنید که Y و X به ترتیب متغیر مورد مطالعه و متغیر کمکی باشند. همچنین فرض کنید که (x_i, y_i) مقادیر مشاهده شده و (X_i, Y_i) مقادیر صحیح دو صفت (X, Y) برای iامین $(i = 1,2, \dots, n)$ واحد نمونه‌ای باشند. فرض کنید که خطاهای اندازه‌گیری

$$U_i = y_i - Y_i \qquad (۱)$$

1. Cochran
2. Shalabh
3. Manisha
4. Singh
5. Shukla, D
6. Karpe
7. Kumar
8. Fuller

و

$$V_i = x_i - X_i \quad (۲)$$

باشند، به طوری که خطاهای اندازه‌گیری ذاتاً تصادفی و ناهمبسته با میانگین صفر و واریانس S_U^2 و S_V^2 هستند. فرض کنید که

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$$

و

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

به ترتیب میانگین جامعه‌ای متغیرهای Y و X و

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

و

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

به ترتیب میانگین نمونه‌ای متغیرهای Y و X و

$$S_X^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2$$

و

$$S_Y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2$$

به ترتیب واریانس جامعه‌ای متغیرهای Y و X باشند. همچنین فرض کنید که C_Y و C_X به ترتیب ضریب تغییرات متغیرهای Y و X باشند و ρ_{XY} ضریب همبستگی بین متغیرهای Y و X و $f = \frac{n}{N}$ کسر نمونه‌گیری باشد.

همچنین فرض کنید که $\bar{X}$، میانگین متغیر کمکی، معلوم باشد. برای به دست آوردن ویژگی‌های برآوردگرها، تعدادی علائم دیگر را معرفی می‌کنیم. فرض کنید که

$$\omega_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}) \quad (۳)$$

$$\omega_U = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} U_i, \quad (۴)$$

$$\omega_X = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) \quad (۵)$$

و

$$\omega_V = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} V_i \quad (۶)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\bar{y} = \bar{Y} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_Y + \omega_U\right) \quad (۷)$$

و

$$\bar{x} = \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_X + \omega_V\right) \quad (۸)$$

بنا به رابطهٔ (۱) میانگین نمونه‌ای متغیر مورد مطالعه $(\bar{y})$ را می‌توان به صورت

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(U_i + Y_i) \quad (۹)$$

نوشت. با توجه به اینکه $E[U_i] = 0$، می‌توان نوشت:

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(E[U_i] + E[Y_i]) = \bar{Y} \quad (۱۰)$$

یعنی، میانگین نمونه‌ای یک برآوردگر نااریب میانگین جامعه است و واریانس آن برابر است با

$$Var(\bar{y}) = \frac{\bar{Y}^2}{n}\left(C_Y^2 + \frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}\right) \quad (۱۱)$$

برای محاسبه اریبی و واریانس دیگر برآوردگرهای موجود از (۷) و (۸) با فرض

$$\begin{cases} \varphi_Y = \bar{y} - \bar{Y} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_Y + \omega_U\right) \\ \varphi_X = \bar{x} - \bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_X + \omega_V\right) \end{cases} \quad (۱۲)$$

داریم

$$E(\varphi_Y) = E(\varphi_X) = 0 \quad (۱۳)$$

زیرا $\bar{y}$ برآوردگر نااریب $\bar{Y}$ و $\bar{x}$ برآوردگر نااریب $\bar{X}$ است و

$$\begin{cases} E(\varphi_Y^2) = Var(\bar{y}) = \frac{1}{n}\bar{Y}^2\left(C_Y^2 + \frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}\right) \\ E(\varphi_X^2) = Var(\bar{x}) = \frac{1}{n}\bar{X}^2\left(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right) \\ E(\varphi_Y\varphi_X) = Cov(\bar{y},\bar{x}) = \frac{1}{n}\bar{Y}\bar{X}\rho_{XY}C_Y C_X \end{cases}$$

(۱۴)

در ادامه این بخش برخی از انواع برآوردگرهای موجود برای میانگین جامعه که مبتنی بر روش برآورد نسبتی بوده و داده‌های نمونه‌گیری دارای خطای اندازه‌گیری هستند را بررسی میی‌کنیم.

برآوردگر شالب [۵]

شالب [۵] برآوردگر

$$t_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} \qquad (۱۵)$$

را پیشنهاد کرد. بدیهی است که این همان برآوردگر نسبتی است. مقدار اریبی t_R برابر

$$B(t_R) = \frac{\bar{Y}}{n}\left\{\left(C_X^2 - \rho_{XY}C_X C_Y\right) + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right\} \qquad (۱۶)$$

و میانگین مربع خطای آن برابر

$$MSE(t_R) = \frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{(C_Y^2 + C_X^2 - 2\rho_{XY}C_Y C_X) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}$$

(۱۷)

است.

برآوردگر مانیشا و سینگ [۴]

مانیشا و سینگ [۴] برآوردگر ترکیبی

$$\bar{y}_\theta = \theta t_R + (1-\theta)\bar{y} \qquad (۱۸)$$

را پیشنهاد کردند، که در آن θ یک عدد ثابت مناسب است. بدیهی است که به‌ازای $\theta = 1$ همان برآوردگر شالب و به‌ازای $\theta = 0$ میانگین نمونه‌ای به‌دست می‌آید. مقدار اریبی $\bar{y}_\theta$ برابر

$$B(\bar{y}_\theta) = \frac{\theta\bar{Y}}{n}\left\{(C_X^2 - \rho_{XY}C_Y C_X) + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right\} \qquad (۱۹)$$

و میانگین مربع خطای آن برابر

$$MSE(\bar{y}_\theta) = \frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{(C_Y^2 + \theta^2 C_X^2 - 2\theta\rho_{XY}C_Y C_X) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \theta^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}$$

(۲۰)

است، به طوری که مقدار بهینهٔ θ برابر است با

$$\theta^* = \frac{\rho_{XY}C_Y C_X}{C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}} \qquad (۲۱)$$

که به ازای آن میانگین مربع خطای $\bar{y}_\theta$ دارای کمترین مقدار ممکن است.

برآوردگر دیواکار شوکلا و همکاران [۶]

دیواکار شوکلا و همکارانش [۶] برآوردگر

$$\bar{y}_D = \beta\bar{y}\left(\frac{\bar{x}'}{\bar{X}}\right) + (1-\beta)\bar{y} \qquad (۲۲)$$

را پیشنهاد کردند، به طوری که در آن β یک عدد ثابت مناسب است و

$$\bar{x}' = \frac{N\bar{X} - n\bar{x}}{N-n} \qquad (۲۳)$$

اریبی $\bar{y}_D$ برابر

$$B(\bar{y}_D) = -\frac{\beta\bar{Y}}{(N-n)}\rho_{XY}C_Y C_X \qquad (۲۴)$$

و میانگین مربع خطای آن برابر

$$MSE(\bar{y}_D) = \frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{(C_Y^2 + \left(\frac{n\beta}{N-n}\right)^2 C_X^2 - 2\frac{n\beta}{N-n}\rho_{XY}C_Y C_X) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \left(\frac{n\beta}{N-n}\right)^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}$$

(۲۵)

است و مقدار بهینه‌ی β برابر است با

$$\beta^* = \left(\frac{N-n}{n}\right)\frac{\rho_{XY}C_Y C_X}{C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}} \qquad (۲۶)$$

که به ازای آن میانگین مربع خطای $\bar{y}_D$ دارای کمترین مقدار ممکن است.

برآوردگر پیشنهاد شده

سینگ و همکارانش [۸] یک برآوردگر نمایی نسبتی-حاصل‌ضربی برای برآورد میانگین جامعهٔ متناهی را به صورت

$$t = \bar{y}\left[\alpha exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) + (1-\alpha)exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\right] \qquad (۲۷)$$

پیشنهاد کردند.

در این بخش با الهام‌گیری از برآوردکننده (۲۷) یک برآوردگر نمایی نسبتی- حاصل‌ضربی جدید را برای میانگین جامعه‌ای متغیر مورد مطالعه، یعنی $\bar{Y}$، با وجود خطای اندازه‌گیری، به صورت

$$t_p = \bar{y}\left[\alpha exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) + (1-\alpha)exp\left(\frac{\bar{x}'-\bar{X}}{\bar{x}'+\bar{X}}\right)\right] \qquad (۲۸)$$

معرفی می‌کنیم، به طوری که α یک عدد ثابت مناسب است.

قضیه ۱: با فرض

$$\alpha_\circ = \left\{\alpha\left(1-\frac{n}{N-n}\right)+\frac{n}{N-n}\right\} \qquad (۲۹)$$

برآوردگر پیشنهاد شده

$$t = \bar{y}\left[\alpha exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) + (1-\alpha)exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\right]$$

دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) مقدار اریبی t_p برابر است با

$$B(t_p) = -\frac{\bar{Y}}{2n}\alpha_\circ\rho_{XY}C_Y C_X + \frac{\bar{Y}\bar{X}}{8n}\left\{\alpha\left[\left(\frac{n}{N-n}\right)^2+3\right]-\left(\frac{n}{N-n}\right)^2\right\}\left(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right) \qquad (۳۰)$$

ب) میانگین مربع خطای t_p برابر است با

$$MSE(t_p) = \frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2+\frac{1}{4}\alpha_\circ^2 C_X^2 - \alpha_\circ\rho_{XY}C_Y C_X\right)+\left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\frac{1}{4}\alpha_\circ^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\} \qquad (۳۱)$$

ج) بهترین مقدار برای $\alpha_\circ^*$ برابر است با

$$\alpha_\circ^* = \frac{2\rho_{XY}C_Y C_X}{\left(\frac{S_X^2+S_V^2}{\bar{X}^2}\right)} \qquad (۳۲)$$

برهان: الف) از جای‌گذاری (۲۳) در (۲۸) برآوردگر پیشنهاد شده را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$t_p = \bar{y}\left[\alpha exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) + (1-\alpha)\exp\left(\frac{\frac{N\bar{X}-n\bar{x}}{N-n}-\bar{X}}{\frac{N\bar{X}-n\bar{x}}{N-n}+\bar{X}}\right)\right] = \bar{y}\left[\alpha exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right)+(1-\alpha)exp\left(\frac{-n(\bar{x}-\bar{X})}{(2N-n)\bar{X}-n\bar{x}}\right)\right] \qquad (۳۳)$$

اینک از جای‌گذاری (۱۲) در (۳۳) داریم

$$t_p = (\bar{Y}+\varphi_Y)\left[\alpha exp\left(\frac{-\varphi_X}{2\bar{X}+\varphi_X}\right) + (1-\alpha)exp\left(\frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}-n\varphi_X}\right)\right]$$

$$= (\bar{Y}+\varphi_Y)\left[\alpha exp\left(\left(\frac{-\varphi_X}{2\bar{X}}\right)\frac{1}{1+\frac{\varphi_X}{2\bar{X}}}\right) + (1-\alpha)exp\left(\left(\frac{-n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right)\frac{1}{1-\frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}}\right)\right]$$

با بسط دادن $exp(.)$ و در نظر گرفتن جمله‌ها تا مرتبهٔ دوم داریم

$$t_p = (\bar{Y} + \varphi_Y)\left[\alpha\left\{1 + \left(\left(\frac{-\varphi_X}{2\bar{X}}\right)\frac{1}{1+\frac{\varphi_X}{2\bar{X}}}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-\varphi_X}{2\bar{X}}\right)\frac{1}{1+\frac{\varphi_X}{2\bar{X}}}\right)^2\right\} + (1-\alpha)\left\{1 + \left(\left(\frac{-n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right)\frac{1}{1-\frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right)\frac{1}{1-\frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}}\right)^2\right\}\right]$$

با فرض اینکه $\left|\frac{\varphi_X}{2\bar{X}}\right| < 1$ و $\left|\frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right| < 1$ می‌توانیم عبارت‌های $\left(\frac{1}{1+\frac{\varphi_X}{2\bar{X}}}\right)$ و $\left(\frac{1}{1-\frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}}\right)$ را بسط دهیم؛ بنابراین با در نظر گرفتن جمله‌ها تا مرتبهٔ اول داریم

$$t_p \cong (\bar{Y} + \varphi_Y)\left[\alpha\left\{1 + \left(\left(\frac{-\varphi_X}{2\bar{X}}\right)\left\{1 - \frac{\varphi_X}{2\bar{X}}\right\}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-\varphi_X}{2\bar{X}}\right)\left\{1 - \frac{\varphi_X}{2\bar{X}}\right\}\right)^2\right\} + (1-\alpha)\left\{1 + \left(\left(\frac{-n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right)\left\{1 + \frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right\}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right)\left\{1 + \frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right\}\right)^2\right\}\right] = (\bar{Y} + \varphi_Y)\left[\alpha\left\{1 - \frac{\varphi_X}{2\bar{X}} + \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi_X}{2\bar{X}}\right)^2\right\} + (1-\alpha)\left\{1 - \frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}} - \frac{1}{2}\left(\frac{n\varphi_X}{2(N-n)\bar{X}}\right)^2\right\}\right]$$

$$= (\bar{Y} + \varphi_Y)\left[1 - \left\{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{n}{N-n}\right)\right\}\frac{1}{2\bar{X}}\varphi_X + \left\{3\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{n}{N-n}\right)^2\right\}\frac{1}{8\bar{X}^2}\varphi_X^2\right]$$

پس با نادیده گرفتن جملات با مرتبه‌های بالاتر از دو، به‌دست می‌آوریم

$$t_p \cong \bar{Y} + \varphi_Y - \frac{1}{2}\left\{\alpha\left(1 - \frac{n}{N-n}\right) + \frac{n}{N-n}\right\}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\varphi_X - \frac{1}{2\bar{X}}\left\{\alpha\left(1 - \frac{n}{N-n}\right) + \frac{n}{N-n}\right\}\varphi_Y\varphi_X + \frac{1}{8}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\left\{\alpha\left[\left(\frac{n}{N-n}\right)^2 + 3\right] - \left(\frac{n}{N-n}\right)^2\right\}\varphi_X^2$$

بنا به تعریف $\alpha_\circ$ در (۲۹) داریم

$$t_p \cong \bar{Y} + \varphi_Y - \frac{1}{2}\alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\varphi_X - \frac{1}{2\bar{X}}\alpha_\circ\varphi_Y\varphi_X + \frac{1}{8}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\left\{\alpha\left[\left(\frac{n}{N-n}\right)^2 + 3\right] - \left(\frac{n}{N-n}\right)^2\right\}\varphi_X^2 \qquad (۳۴)$$

بنابراین

$$t_p - \bar{Y} \cong \varphi_Y - \frac{1}{2}\alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\varphi_X - \frac{1}{2\bar{X}}\alpha_\circ\varphi_Y\varphi_X + \frac{1}{8}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\left\{\alpha\left[\left(\frac{n}{N-n}\right)^2 + 3\right] - \left(\frac{n}{N-n}\right)^2\right\}\varphi_X^2 \qquad (۳۵)$$

اگر از طرفین رابطهٔ (۳۵) امید ریاضی بگیریم، از (۱۳) و (۱۴) مقدار اریبی برآوردگر پیشنهاد شدهٔ t_p برابر است با

$$B(t_p) = E(t_p - \bar{Y}) \cong -\frac{1}{2\bar{X}}\alpha_\circ E(\varphi_Y\varphi_X) + \frac{1}{8}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\left\{\alpha\left[\left(\frac{n}{N-n}\right)^2 + 3\right] - \left(\frac{n}{N-n}\right)^2\right\}E(\varphi_X^2)$$

$$= -\frac{\bar{Y}}{2n}\alpha_\circ\rho_{XY}C_YC_X + \frac{\bar{Y}\bar{X}}{8n}\left\{\alpha\left[\left(\frac{n}{N-n}\right)^2 + 3\right] - \left(\frac{n}{N-n}\right)^2\right\}\left(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right)$$

ب) از مجذور کردن دو طرف (۳۵) و محاسبهٔ امید ریاضی آن، با استفاده از (۱۴) و نادیده گرفتن جملات با مرتبه‌های بالاتر از دو، داریم

$$MSE(t_p) = E(t_p - \bar{Y})^2$$
$$= E\left[\varphi_Y^2 + \frac{1}{4}\alpha_\circ^2\frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2}\varphi_X^2 - \alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\varphi_Y\varphi_X\right]$$
$$= E(\varphi_Y^2) + \alpha_\circ^2\frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2}E(\varphi_X^2) + 2\alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}E(\varphi_Y\varphi_X$$
$$= \frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2 + \frac{1}{4}\alpha_\circ^2C_X^2 - \alpha_\circ\rho_{XY}C_YC_X\right) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{1}{4}\alpha_\circ^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}$$

ج) با مشتق‌گیری از (۳۱) نسبت به $\alpha_\circ$ و برابر صفر قرار دادن عبارت حاصل، مقدار بهینهٔ $\alpha_\circ$ برابر است با

$$\alpha_\circ^* = \frac{2\rho_{XY} C_Y C_X}{\left(\frac{S_X^2 + S_V^2}{\bar{X}^2}\right)}$$

از جای‌گذاری (۳۲) در (۳۱)، مینیمم مقدار میانگین مربع خطای t_p برابر است با

$$minMSE\left(t_p\right) = \frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2 + \frac{1}{4}\alpha_\circ^{*2} C_X^2 - \alpha_\circ^* \rho_{XY} C_Y C_X\right) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{1}{4}\alpha_\circ^{*2}\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\} \quad (۳۶)$$

مقایسهٔ کارایی برآوردگر پیشنهاد شده با دیگر برآوردگرها

در این بخش برآوردگر پیشنهاد شده را با دیگر برآوردگرهای مذکور، زمانی که مشاهدات تحت خطاهای اندازه‌گیری هستند، مقایسه می‌کنیم.

۱. برآوردگر پیشنهاد شده از میانگین نمونه‌ای متداول کاراتر است اگر

$$Var(\bar{y}) - MSE\left(t_p\right) > 0 \quad (۳۷)$$

بنابراین از (۱۱) و (۳۱) داریم

$$\frac{1}{n}\bar{Y}^2\left(C_Y^2 + \frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}\right) - \frac{1}{n}\bar{Y}^2\left\{\left(C_Y^2 + \frac{1}{4}\alpha_\circ^2 C_X^2 - \alpha_\circ \rho_{XY} C_Y C_X\right) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{1}{4}\alpha_\circ^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\} > 0$$

پس از ساده کردن داریم

$$\frac{1}{4n}\bar{Y}^2\left\{\alpha_\circ^2 (C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}) - 4\alpha_\circ \rho_{XY} C_Y C_X\right\} < 0$$

این رابطه صحیح است اگر

$$\alpha_\circ^2 (C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}) - 4\alpha_\circ \rho_{XY} C_Y C_X < 0 \quad (۳۸)$$

بنابراین t_p از $\bar{y}$ کاراتر است اگر

$$\begin{cases} \rho_{XY} > \frac{1}{4}\alpha_\circ \frac{C_X}{C_Y}\left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \quad ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} \\ \rho_{XY} < -\frac{1}{4}\alpha_\circ \frac{C_X}{C_Y}\left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \quad ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases} \quad (۳۹)$$

به‌ویژه هنگامی که C_X و C_Y دارای مقادیر یکسان هستند، شرایط (۳۹) به شرایط زیر تقلیل می‌یابد،

$$\begin{cases} \rho_{XY} > \frac{1}{4}\alpha_\circ \left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \quad ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} \\ \rho_{XY} < -\frac{1}{4}\alpha_\circ \left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \quad ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases} \quad (۴۰)$$

۲. برآوردگر پیشنهاد شده از برآوردگر شالب [۵] کاراتر است اگر

$$MSE(t_R) - MSE\left(t_p\right) > 0 \quad (۴۱)$$

بنابراین از (۱۷) و (۳۱) داریم

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{(C_Y^2 + C_X^2 - 2\rho_{XY} C_Y C_X) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\} - \frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2 + \frac{1}{4}\alpha_\circ^2 C_X^2 - \alpha_\circ \rho_{XY} C_Y C_X\right) + \left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{1}{4}\alpha_\circ^2 \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\} > 0$$

پس از ساده کردن داریم

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(1 - \frac{1}{4}\alpha_\circ^2\right)\left(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right) - 2(1 - \frac{1}{2}\alpha_\circ)\rho_{XY} C_Y C_X\right\} > 0$$

این رابطه صحیح است اگر

$$\left(1 - \frac{1}{4}\alpha_\circ^2\right)\left(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right) - 2(1 - \frac{1}{2}\alpha_\circ)\rho_{XY} C_Y C_X > 0 \quad (۴۲)$$

بنابراین t_p از t_R کاراتر است اگر

$$\begin{cases} \rho_{XY} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} & \\ \rho_{XY} > -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$
(۴۳)

به‌ویژه هنگامی که C_YوC_X دارای مقادیر یکسان هستند، شرایط (۴۳) به شرایط زیر تقلیل می‌یابد،

$$\begin{cases} \rho_{XY} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} & \\ \rho_{XY} > -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$
(۴۴)

۳. برآوردگر پیشنهاد شده از برآوردگر مانیشا و سینگ [۴] کاراتر است اگر

$$MSE(\bar{y}_\theta) - MSE(t_p) > 0 \qquad (۴۵)$$

بنابراین از (۲۰) و (۳۱) داریم

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2+\theta^2 C_X^2-2\theta\rho_{XY}C_YC_X\right)+\left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\theta^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}-\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2+\frac{1}{4}\alpha_\circ^2C_X^2-\alpha_\circ\rho_{XY}C_YC_X\right)+\left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\frac{1}{4}\alpha_\circ^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}>0$$

پس از ساده کردن داریم

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(\theta^2-\frac{1}{4}\alpha_\circ^2\right)\left(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right)-2\left(\theta-\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\rho_{XY}C_YC_X\right\}>0$$

این رابطه صحیح است اگر

$$\left(\theta^2-\frac{1}{4}\alpha_\circ^2\right)\left(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right)-2\left(\theta-\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\rho_{XY}C_YC_X>0$$
(۴۶)

بنابراین با فرض این که $\alpha_\circ < 2\theta$، برآوردگر t_p از $\bar{y}_\theta$ کاراتر است اگر

$$\begin{cases} \rho_{XY} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} & \\ \rho_{XY} > -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$
(۴۷)

و با این فرض که $\alpha_\circ > 2\theta$، برآوردگر t_p از $\bar{y}_\theta$ کاراتر است اگر

$$\begin{cases} \rho_{XY} > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} & \\ \rho_{XY} < -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\right) & ; \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$
(۴۸)

۴. برآوردگر پیشنهاد شده از برآوردگر دیواکار شوکلا و همکارانش [۶] کاراتر است اگر

$$MSE(\bar{y}_D) - MSE(t_p) > 0 \qquad (۴۹)$$

بنابراین از (۲۵) و (۳۱) داریم

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2+\left(\frac{n\beta}{N-n}\right)^2C_X^2-2\frac{n\beta}{N-n}\rho_{XY}C_YC_X\right)+\left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\left(\frac{n\beta}{N-n}\right)^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}-\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(C_Y^2+\frac{1}{4}\alpha_\circ^2C_X^2-\alpha_\circ\rho_{XY}C_YC_X\right)+\left[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\frac{1}{4}\alpha_\circ^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right]\right\}>0$$

پس از ساده کردن داریم

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\left\{\left(\left(\frac{n\beta}{N-n}\right)^2-\frac{1}{4}\alpha_\circ^2\right)\left(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right)-2\left(\frac{n\beta}{N-n}-\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\rho_{XY}C_YC_X\right\}>0$$

این رابطه صحیح است اگر

$$\left(\left(\frac{n\beta}{N-n}\right)^2-\frac{1}{4}\alpha_\circ^2\right)\left(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\right)-2\left(\frac{n\beta}{N-n}-\frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\rho_{XY}C_YC_X>0$$
(۵۰)

بنابراین با فرض این که $\alpha_\circ < \frac{2n\beta}{N-n}$ ، برآوردگر t_p از

$\bar{y}_D$ کاراتر است اگر

$$\begin{cases} \rho_{XY} < \frac{1}{2}\left(\frac{n\beta}{N-n} + \frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \quad ; \ \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} \\ \rho_{XY} > -\frac{1}{2}\left(\frac{n\beta}{N-n} + \frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \ ; \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

(۵۱)

و با این فرض که $\alpha_\circ > \frac{2n\beta}{N-n}$، برآوردگر t_p از $\bar{y}_D$ کاراتر است اگر

$$\begin{cases} \rho_{XY} > \frac{1}{2}\left(\frac{n\beta}{N-n} + \frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \quad ; \ \bar{X}\bar{Y} > 0 \text{ اگر} \\ \text{و} \\ \rho_{XY} < -\frac{1}{2}\left(\frac{n\beta}{N-n} + \frac{1}{2}\alpha_\circ\right)\frac{C_X}{C_Y}\left(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}\right) \ ; \bar{X}\bar{Y} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

(۵۲)

مقایسهٔ عددی و شبیه‌سازی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی برآورد پارامترها در حالات مختلف بررسی می‌شود. برای مقایسه تجربی و عددی برآوردگر پیشنهاد شده t_p^* (برآوردگر پیشنهاد شده به ازای $\alpha_\circ^*$) با برآوردگر میانگین نمونه‌ای متداول $(\bar{y})$، برآوردگر نسبتی شالب (t_R)، برآوردگر مانیشا و سینگ $(\bar{y}_\theta)$ و برآوردگر دیواکار شوکلا $(\bar{y}_D)$ یک جامعهٔ فرضی و شبیه‌سازی شده را در نظر می‌گیریم. برای مقایسهٔ برآوردگر پیشنهاد شده، MSE برآوردگرها محاسبه شده است. شش جامعه شبیه‌سازی شده‌اند به طوری که ضریب همبستگی آنها پایین، بالا، مثبت و منفی است. فرض شده است که حجم هر جامعه ۵۰۰۰، حجم طبقهٔ پاسخگو ۳۷۵۰ و حجم نمونه ۵۰۰ و نرخ عدم پاسخ ۰/۳ است. متغیرکمکی واقعی مربوط به جامعهٔ $X \sim N(10,2)$ و متغیر کمکی اندازه‌گیری‌شده، $x = X + N(10,2)$ فرض شده است،

جدول ۱. پارامترهای جامعه

پارامترها	جامعه ۱	جامعه ۲	جامعه ۳	جامعه ۴	جامعه ۵	جامعه ۶
$\bar{X}$	۳/۰۰۶۷۱۳	۵/۰۱۱۱۷۵	۶/۹۷۸۸۳۸	۱/۰۰۷۳۹۱	−۰/۹۷۲۸	−۲/۹۵۵۶۵
$\bar{Y}$	۱۰/۰۶۶۶۸	۱۰/۰۱۲۴۳	۹/۹۸۱۷۱۶	۹/۹۵۳۷۲۲	۹/۹۵۰۷۶۴	۹/۹۴۷۱۱۴
S_Y^2	۱/۰۵۷۳۲۲	۱/۳۸۴۶۳۵	۲/۰۸۶۰۲۴	۱/۰۳۱۰۷۸	۱/۳۳۱۷۳۶	۱/۹۶۸۲۷۷
S_X^2	۴/۰۲۱۱۵	۴/۰۶۵۱۸۷	۴/۱۶۰۳۳۲	۴/۰۶۲۹۶۹	۴/۰۶۲۷۲۵	۴/۰۲۹۰۱۱
S_U^2	۰/۹۸۴۷۲۹	۰/۹۵۳۵۷۳	۰/۹۹۰۷۶۷	۱/۰۴۴۵۸۴	۱/۰۰۳۷۱۴	۰/۹۹۹۶۶۷
S_V^2	۰/۹۹۲۰۹۴	۰/۹۹۱۹۹۹	۰/۹۷۷۴۸۶	۱/۰۴۰۳۳۱	۱/۰۱۲۲۷۱	۱/۰۳۸۵۲۱
ρ_{YX}	۰/۱۶۳۲۰۴	۰/۵۲۱۶۳۵	۰/۷۱۲۸۳۴	−۰/۱۸۲۷۵	−۰/۵۰۱۷۵	−۰/۷۱۵۵۹
$S_{Y(z)}^2$	۰/۹۸۹۲۰۶	۱/۳۲۳۸۱۳	۲/۱۰۳۰۵۱	۱/۰۲۲۱۹۸	۱/۳۱۷۷۵۴	۲/۰۱۵۷۹۷
$S_{X(z)}^2$	۴/۰۳۰۲۰۷	۳/۹۷۸۴۹۱	۴/۰۴۲۹۹۴	۳/۹۸۲۵۵۷	۴/۱۷۸۵۹۷	۳/۹۳۷۳۳
$S_{U(z)}^2$	۱/۰۳۷۳۵۵	۰/۹۳۲۵۷۷	۰/۹۵۵۶۹۴	۱/۰۱۵۹۷۵	۱/۰۱۹۹۷۵	۰/۹۳۴۰۶۹
$S_{V(z)}^2$	۰/۹۹۶۱۳۹	۰/۹۶۴۷۸۶	۰/۹۲۵۲۰۳	۰/۹۷۰۸۴	۱/۰۴۴۴۲	۰/۹۷۹۲۵۷
$\rho_{YX(z)}$	۰/۱۲۳۷۵۸	۰/۵۲۲۸۶۹	۰/۷۰۳۷۶۶	−۰/۱۶۷۰۵	−۰/۵۱۷۹۲	−۰/۷۱۸۷۳

پس $V = x - X$.

متغیر مورد مطالعه با مدل خطی $Y = 2 + bX + N(0,1)$ شبیه‌سازی شده است. برای کنترل همبستگی بین متغیر مورد مطالعه و متغیر کمکی، مقدار b تغییر کرده است. مقادیر مفروض b عبارتند از: ۰/۱، ۰/۳، ۰/۵، −۰/۱، −۰/۳ و −۰/۵ همانند متغیر کمکی، متغیر مورد مطالعه اندازه‌گیری شده با $y = Y + N(0,1)$ تعمیم داده شده است، بنابراین $U = y - Y$.

پارامترهای جامعه در جدول ۱ خلاصه شده است. در جدول ۲، میانگین مربع خطای (MSE) برآوردگر پیشنهاد شده و چهار برآوردگر دیگر محاسبه شده‌اند. جدول ۳، درصد کارایی نسبی (PRE) برآوردگر شالب، برآوردگر مانیشا و سینگ، برآوردگر دیواکار شوکلا و برآوردگر پیشنهاد شده

جدول ۲. میانگین مربع خطای برآوردگرها با وجود خطای اندازه‌گیری

$MSE(t)$	جامعه ۱	جامعه ۲	جامعه ۳	جامعه ۴	جامعه ۵	جامعه ۶
$MSE(\bar{y})$	۰/۰۰۴۰۸۴	۰/۰۰۴۶۷۶	۰/۰۰۶۱۵۴	۰/۰۰۴۱۵۱	۰/۰۰۴۶۷۱	۰/۰۰۵۹۳۶
$MSE(t_R)$	۰/۰۰۴۵۷۷	۰/۰۰۴۷۳۲	۰/۰۰۵۳۰۳	۰/۰۰۴۴۰۷	۰/۰۰۴۳۱۲	۰/۰۰۴۴۳۶
$MSE(\bar{y}_\theta)$	۰/۰۰۴۰۳۹	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۳۳۳
$MSE(\bar{y}_D)$	۰/۰۰۶۹۳۰	۰/۰۴۲۸۳۷	۰/۱۱۴۳۰۱	۰/۰۰۷۶۰۶	۰/۰۳۸۴۸۵	۰/۱۰۶۹۰۵
$MSE(t_p)$	۰/۰۰۴۰۳۹	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۳۳۳

نسبت به برآوردگر نااریب را در برمی‌گیرد.

بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به درصد کارایی نسبی داده شده در جدول ۳، می‌توان نتیجه گرفت که در هر شش جامعه، برآوردگر پیشنهاد شده (t_p) از برآوردگرهای شالب (t_R) و دیواکار شوکلا $(\bar{y}_D)$ بهتر و کاراتر است و کارایی برآوردگر پیشنهاد شده با کارایی برآوردگر مانیشا و سینگ $(\bar{y}_\theta)$ برابر است. همان طور که ملاحظه می‌کنید در هر شش جامعه برآوردگر دیواکار شوکلا خیلی ناکارآمد است، همچنین کارایی برآوردگرهای شالب و دیواکار شوکلا از کارایی برآوردگر نااریب معمولی $(\bar{y})$ پایین‌تر است.

جدول ۳. درصد کارایی نسبی برآوردگرها با وجود خطای اندازه‌گیری

$PRE(.)$	جامعه ۱	جامعه ۲	جامعه ۳	جامعه ۴	جامعه ۵	جامعه ۶
$PRE(t_R)$	٪۸۹	٪۹۹	٪۱۱۶	٪۹۴	٪۱۰۸	٪۱۳۴
$PRE(\bar{y}_\theta)$	٪۱۰۱	٪۱۱۵	٪۱۳۹	٪۱۰۱	٪۱۱۳	٪۱۳۷
$PRE(\bar{y}_D)$	٪۵۹	٪۱۱	٪۵	٪۵۵	٪۱۲	٪۶
$PRE(t_p)$	٪۱۰۱	٪۱۱۵	٪۱۳۹	٪۱۰۱	٪۱۱۳	٪۱۳۷

References

[1] Cochran, W. G. (1968). Errors of measurement in statistics.Techno metrics. 10(4), 637-666.

[2] Fuller, W. A. (1987). Measurement Error Models. Wiley, New York.

[3] Kumar, M., Singh, R., Singh, A.K. and Smarandache, F. (2011). Some ratio type estimators under measurement errors. World Applid Sciences Journal, 14(2), 272-276.

[4] Manisha, Singh, R. (2001). An estimation of population mean in the presence of measurement errors. Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics 54(1).13–18.

[5] Shalabh. (1997). Ratio method of estimation in the presence of measurement errors. Journal of Indian Society of Agricultural Statistics, 50(2), 150–155.

[6] Shukla, D., Pathak, S., Thakur, N.S. (2012). An estimator for mean estimation in presence of measurement error. Research and Reviews: A Journal of Statistics,1(1). 1–8.

[7] Singh, H., Karpe, N. (2010). Estimation of mean, ratio and product using auxiliary information in the presence of measurement errors in sample surveys. Journal of Statistical Theory and Practice 4, 111–136.

[8] Singh, R., Chauhan, P. and Sawan, N. (2008). On linear combination of ratio and product type exponential estimator for estimating the finite population mean, Statistics in Transition - New Series, 9, 105–115.