Statistical Sciences Extension
Vol. 2, No. 2, Spring & Summer 2017, (P 33-40)

گسترهٔ علوم آماری
سال دوم، شماره دوم، بهار و تابستان 1396، (ص 33-40)

برآوردهای E-بیز و بیزی سلسله مراتبی پارامتر اسکالر توزیع وایبول بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم با سه تابع زیان

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی *
مربی، آمار، دانشگاه پیام نور

تاریخ دریافت: 1395/10/10 **دریافت پذیرش**: 1396/12/24

E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Estimators for the Scale Parameter of the Weibull Distribution Based on the Progressive Type II Censoring with Three Loss Functions

Sh. Yaghoobzadeh Shahrastani
Lecturer, Statistics, University Payame Noor

Received: 2016/12/30 **Accepted:** 2018/03/15

Abstract
In this paper, the estimation of the scale parameter of a two-parameter Weibull distribution based on the Progressive Type II censoring samples has been considered. The E-Bayesian and Hierarchical Bayesian estimators for the scale parameter of the Weibull distribution based on the symmetric and asymmetric loss functions, such as the squared error (SE), general entropy (GE) and Linear exponential (LINEX) loss functions, are provided. Then, with the use of mean square error and absolute bias and through Monte Carlo simulation study, these methods are compared with each other and with E-Bayesian estimator.

Keywords
E-Bayesian Estimation, Hierarchical Bayesian Estimation, Weibull Distribution, Progressive Type II Censoring, Monte Carlo Simulation.

چکیده
در این مقاله برآوردهای E-بیز و بیزی سلسله مراتبی پارامتر اسکالر توزیع وایبول دو پارامتری بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم و تحت توابع زیان درجه دوم، آنتروپی و لاینکس به دست می‌آید و سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و به کمک معیارهای قدر مطلق اریبی و میانگین مربع خطای برآوردگرها، این برآوردگرها با هم و با برآوردگر بیز مقایسه می‌شوند.

واژگان کلیدی
برآورد E-بیز، برآورد بیز سلسله مراتبی، توزیع وایبول، سانسور فزآینده نوع دوم، شبیه‌سازی مونت کارلو.

*Corresponding Author: yagoubzade@gmail.com

*** نویسنده مسئول**: شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی

مقدمه

چون توزیع وایبول کاربردهای زیادی در حوزه‌های مختلف علم مانند تحلیل بقا، مهندسی قابلیت اعتماد، پیش‌بینی آب و هوا دارد (هان و شاپیرو، 1967) و (جانسون و همکاران، 1995)، برآوردهای پارامترهای آن به روش‌های مختلف توصیه می‌شود که برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع وایبول توسط (بالاکریشنان و کاتن، 2008) تحت داده‌های کامل و سانسور شده و برآورد بیزی پارامترهای آن توسط (کاناوس و تاکاس، 1973) و (گیور و همکاران، 2012) به دست آمده است. توزیع پیشین بیزی سلسله مراتبی ابتدا توسط (لیندلی و اسمیت، 1972) معرفی شد و سپس توسط (هان، 1987) بیشتر بررسی و روش‌های E-بیز و سلسله مراتبی بیزی معرفی شد. اخیرا روش‌های E-بیز و بیزی سلسله مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برای برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط (هان، 2009 و 2011)، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع 12 بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم توسط (جاهین و اکاشا، 2011)، برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط (وانگ و همکاران، 2012)، برآورد پارامترهای توزیع گومپرتز مبتنی بر داده‌های سانسور شده توسط (رید و همکاران، 2016) استفاده شد. همچنین برآوردهای گوسی-بیزی، گوسی-E-بیز و گوسی-بیزی سلسله مراتبی پارامتر اسکالر توزیع ارلانگ توسط (رید و همکاران، 2016) و پارامترهای توزیع فرچت توسط (رید و همکاران، 2016) به دست آمد. در این مقاله برآورد پارامتر اسکالر توزیع وایبول با فرض معلوم بودن پارامتر شکل آن به روش‌های E-بیز و بیز سلسله مراتبی با استفاده از طرح سانسور فزآینده نوع دوم به دست می‌آید. توزیع وایبول دو پارامتری به صورت

$$f(x;a,b)=abx^{a-1}e^{-bx^{a}},\ x>0$$

به طوری‌که $a>0, b>0$ است، در نظر گرفته می‌شود.

سانسور کردن یک امر متداول در آزمایشات مربوط به طول عمر و مطالعات قابلیت اطمینان است. اگر آزمایشگر تصمیم بگیرد با مشاهده اولین شکست، R_1 واحد از واحدهای آزمایشی سالم و در زمان دومین شکست، R_2 واحد از واحدهای آزمایشی سالم را به تصادف از آزمایش خارج کند و این کار را ادامه دهد تا در زمان mامین شکست همه واحدهای باقیمانده یعنی $R_m=n-R_1-R_2-\ldots-R_{m-1}-m$ واحد از آزمایش خارج شوند، در این صورت طرح سانسور فزآینده نوع دوم رخ می‌دهد. در این حالت زمان‌های شکست واحدها متغیرهای تصادفی و R_iها ثابت‌های از قبل تعیین شده‌اند. در نتیجه این طرح سانسور، m مقدار مرتب شده به دست می‌آید که آماره‌های ترتیبی سانسور فزآینده نوع دوم نامیده می‌شود. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به (بالاکریشنان و کوهن، 1991) مراجعه کرد. در سال‌های اخیر، مطالعات زیادی روی روش‌های استنباطی با داده‌های سانسور فزآینده نوع دوم انجام شده که می‌توان به (بالاکریشنان و سندهو، 1995)، (بالاکریشنان و آگروالا، 2000)، (بالاکریشنان و اصغرزاده، 2005) اشاره کرد. به این ترتیب، در این مقاله، در بخش‌های دوم و سوم به ترتیب برآورد E-بیز و برآورد بیزی سلسله مراتبی پارامتر اسکالر b در توزیع وایبول دو پارامتری تحت تابع‌های زیان درجه دوم، آنتروپی و لاینکس در طرح سانسور فزآینده نوع دوم به دست آید. در بخش چهارم، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، برآوردگرهای بیزی، E-بیز و بیزی سلسله مراتبی با هم مقایسه می‌شوند. بخش پنجم هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

برآورد E-بیز پارامتر b

در این بخش، برآوردهای E-بیز b به دست خواهد آمد؛ بنابراین فرض می‌شود توزیع پیشین b، توزیع گاما با ابر پارامترهای $a>0$ و $b>0$ و به صورت زیر باشد.

$$p(b\,|\,a,b)=\frac{b^{a}}{\Gamma(a)}b^{a-1}e^{-bb},\ b>0$$

مشتق مرتبه اول آن نسبت b به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{dp(b\,|\,a,b)}{db}=\frac{b^{a}b^{a-2}e^{-bb}}{\Gamma(a)}((a-1)-bb)$$

با توجه به (هان، 1997)، a و b طوری در نظر گرفته می‌شود تا $\pi(\beta|a,b)$ نسبت به β کاهشی باشد؛ بنابراین باید $b>0$ و $0<a\le 1$ باشد. (برگر، 1985) نشان داد که بزرگ شدن b باعث می‌شود کارایی برآوردگر بیز β کاهش یابد؛ بنابراین ابر پارامتر b باید از بالا کراندار شده و به صورت $0<b<c$ باشد. (هان، 2011) نشان داد که مناسب‌ترین توزیع b، توزیع یکنواخت است؛ بنابر این در این مقاله توزیع b توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c)$ $(\pi_1(.))$ و همچنین $a=1$ در نظر گرفته می‌شود که در این صورت توزیع $\pi(\beta|a,b)$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\pi(\beta|b)=be^{-b\beta},\ \beta>0, b>0 \quad (2)$$

تعریف 1: اگر برآورد بیز پارامتر β، $\hat{\beta}_B(b)$ باشد، آن‌گاه برآورد E-بیز پارامتر β که با نماد $\hat{\beta}_{EB}$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\hat{\beta}_{EB}=\int_0^c \hat{\beta}_B(b)\pi_1(b)db$$

برآورد E-بیز β تحت تابع زیان درجه دوم

در این بخش با تابع زیان $L(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$ که $\hat{\theta}$ برآورد θ است ابتدا برآورد بیز و سپس برآورد E-بیز β به دست می‌آید. اگر توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (1)، توزیع زمان شکست و $Y_{1:m:n},Y_{2:m:n},\ldots,Y_{m:m:n}$ یک نمونه سانسور شده فزآینده نوع دوم از آن و y_i یافته $Y_{i:m:n}$ باشد، آن‌گاه با توجه به بالاکریشنان و آگاروالا [15] تابع درست‌نمایی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$L(\beta|\mathbf{Y})=C\prod_{i=1}^{m} f(y_i|\beta)\left[1-F(y_i|\beta)\right]^{R_i} \quad (3)$$
$$=C\alpha^m\beta^m\left(\prod_{i=1}^{m} y_i\right)^{\alpha-1} e^{-\beta\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}$$

که در آن

$$\mathbf{Y}=(Y_{1:m:n},Y_{i:m:n},\ldots,Y_{m:m:n})$$

و

$$C=n(n-R_1-1)\times\ldots\times(n-R_1-R_2-\ldots-R_{m-1}-m+1)$$

می‌باشد. با توجه به روابط (2) و (3) توزیع پسین β

$$\pi_1^*(\beta|\mathbf{Y})=\frac{\left(b+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)^{m+1}}{m!}\times\beta^n e^{-\beta\left(b+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)},\quad \beta>0$$

به دست می‌آید؛ بنابراین برآورد بیز β تحت این تابع زیان که با نماد $\hat{\beta}_{BS}(b)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$\hat{\beta}_{BS}(b)=(m+1)\left(b+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)^{-1}$$

اکنون با توجه به تعریف 1 و توزیع $\pi_1^*(\beta|\mathbf{Y})$ و $\pi(b)=\frac{1}{c},0<b<c$، برآورد E-بیز β که با نماد $\hat{\beta}_{EBS}$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$\hat{\beta}_{EBS}=\frac{1}{c}\int_0^c \hat{\beta}_{BS}(\beta)d\beta$$

$$=\frac{(m+1)}{c}\left[\log\left(c+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)-\log\left(\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)\right]$$

برآورد E-بیز β تحت تابع زیان آنتروپی

تابع زیان آنتروپی به صورت

$$L(\hat{\theta},\theta)\propto\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{k}-k\ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)-1\quad ,k\neq 0$$

است که برآورد بیز β در این حالت به صورت

$$\hat{\beta}_{BG}(\beta)=\left(E\left(\beta^{-k}\,|\,\mathbf{Y}\right)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$=\left[\frac{\Gamma(m+1-k)}{m!}\right]^{-\frac{1}{k}}\left(\beta+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)^{-1}$$

و برآورد E-بیز آن با توجه به تعریف 1 و $\hat{\beta}_{BG}(\beta)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\hat{\beta}_{BG}(\beta)=\left(E\left(\beta^{-k}\,|\,\mathbf{Y}\right)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$=\left[\frac{\Gamma(m+1-k)}{m!}\right]^{-\frac{1}{k}}\left(\beta+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)^{-1}$$

برآورد E-بیز β تحت تابع زیان لاینکس

تابع زیان لاینکس به صورت

$$L(\hat{\theta},\theta)=e^{\eta(\hat{\theta}-\theta)}-\eta(\hat{\theta}-\theta)-1,\ \ \eta\neq 0$$

است که در این حالت برآورد بیز β به صورت زیر است.

$$\hat{\beta}_{BL}(\beta)=-\frac{1}{\eta}\log E\left(e^{-\eta\beta}\,|\,\mathbf{Y}\right)$$

$$=-\frac{m+1}{\eta}\log\left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}{\eta+\beta+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}\right)$$

در نتیجه، برآورد E-بیز β به صورت زیر به دست آید

$$\hat{\beta}_{EBL}=\frac{m+1}{\eta}\left\{\left(\eta+c+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)\times\log\left(\frac{\eta+c+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}{c+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}\right)\times\log\left(\frac{\eta+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}\right)\right\}$$

برآورد بیزی سلسله مراتبی β

در این بخش، برآورد بیز سلسله مراتبی β با توابع زیان درجه دوم، آنتروپی و لاینکس به دست می‌آید.

تعریف 2: اگر λ یک ابر پارامتر در پارامتر θ و تابع چگالی پیشین θ، $p_2(\theta\,|\,\lambda)$ و تابع چگالی پیشین ابر پارامتر λ، $p_3(\lambda)$ باشد، آن‌گاه تابع چگالی پیشین سلسله مراتبی θ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$p_4(\theta)=\int_{\Lambda} p_2(\theta|\lambda)p_3(\lambda)d\lambda,\quad \lambda\in\Lambda$$

بنابراین با توجه به رابطه (2) و تعریف 2 و توزیع β که یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c)$ است، توزیع پیشین سلسله مراتبی β عبارت است از:

$$p_4(\beta)=\frac{1-c\beta e^{-c\beta}-e^{-c\beta}}{c\beta^2}$$

در نتیجه تابع چگالی پسین سلسله مراتبی β به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p_2^*(\beta|Y)=\frac{\beta^m e^{-\beta\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}p_4(\beta)}{\int_0^{\infty}\beta^n e^{-\beta\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}p_4(\beta)d\beta}=\frac{c\beta^m p_4(\beta)}{CK_c^{d}(m)}e^{-\beta\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}}$$

به طوری‌که $d=\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^{\alpha}$ و

$$K_c^d(m)=\Gamma(m-1)d^{-(m-1)}-c\Gamma(m)(c+d)^{-m}-\Gamma(m-1)(c+d)^{-(m-1)}$$

هستند؛ بنابراین برآوردهای بیزی سلسله مراتبی β تحت توابع زیان درجه دوم، آنتروپی و لاینکس که به ترتیب به صورت‌های

$$\hat{\beta}_{HBS}=E(\beta|\mathbf{Y})=\int_0^{\infty}\beta p_2^*(\beta|\mathbf{Y})d\beta$$

$$\hat{\beta}_{HBG}=(E(\beta^{-k}|Y))^{-\frac{1}{k}}=\left(\int_0^{\infty}\beta^{-k}p_2^*(\beta|\mathbf{Y})d\beta\right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$\hat{\beta}_{HBL}=-\frac{1}{h}\log E(e^{-h\beta}|Y)=-\frac{1}{h}\log\left(\int_0^{\infty}e^{-h\beta}p_2^*(\beta|\mathbf{Y})d\beta\right)$$

تعریف می‌شوند، عبارتند از:

$$\hat{\beta}_{HBS}=\frac{K_c^d(m+1)}{CK_c^d(m)}$$

$$\hat{\beta}_{HBG}=\left(\frac{K_c^d(m-h+2)}{CK_c^d(m)}\right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$\hat{\beta}_{HBL}=-\frac{1}{h}\log\left(\frac{K_c^{d+h}(m+1)}{CK_c^{d+h}(m)}\right)$$

مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، با استفاده از شبیه‌سازی، برآوردهای بیزی، E-بیز و بیزی سلسله مراتبی β با هم مقایسه می‌شوند که برای این منظور از الگوریتم (بالاکریشنان و سندهو، 1995)، از توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (1) و با پارامترهای $\alpha=2$ و $\beta=1/5$ نمونه‌های سانسور شده فزآینده نوع دوم به صورت زیر تولید می‌شود.

گام اول: ابتدا m عدد تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت استاندارد تولید شده و W_1، W_2، ...، W_m نام‌گذاری می‌شود.

گام دوم: به ازای $i=1,2,...,m$، V_iها به صورت $V_i=W_i^{\{1/(i+\sum_{j=m+1-i}^{m}R_j)\}}$ تعریف می‌شوند.

گام سوم: به ازای $i=1,2,...,m$، $U_{i:m:n}$ها به صورت $U_{i:m:n}=1-V_mV_{m-1}...V_{m+1-i}$ تعریف

می‌شوند که در این حالت $U_{1:m:n}, U_{2:m:n}, \ldots, U_{m:m:n}$ نمونه سانسور شده فزآینده نوع دوم از توزیع یکنواخت استاندارد است.

گام چهارم: به ازای $i=1,2,\ldots,m$، $y_{i:m:n}$ ها به صورت $y_{i:m:n}=F^{-1}(U_{i:m:n})$ تعریف می‌شود که $F^{-1}(.)$ معکوس تابع توزیع متناظر با تابع چگالی احتمال (1) است. در این حالت $y_{1:m:n}, y_{2:m:n}, \ldots, y_{m:m:n}$ آماره‌های ترتیبی سانسور شده فزآینده نوع دوم از توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (1) هستند. اکنون با استفاده از نمونه تولید شده $y_{1:m:n}, y_{2:m:n}, \ldots, y_{m:m:n}$ و به کمک روابط (6) تا (15) برآوردگرهای بیزی، E-بیز و بیزی سلسله مراتبی و مقدار اریبی برآوردگرها به ازای $b=0/4$ و $k=h=0/5$ محاسبه می‌شود. گام‌های اول تا چهارم 1000 بار تکرار شده و سپس میانگین مقادیر برآوردگرها، میانگین مقادیر اریبی و جذر خطای میانگین مربعات برآوردگرها ($\sqrt{MSE}$) محاسبه می‌شود که نتایج در جدول‌های 1 تا 3 آمده است.

جدول 1. میانگین برآوردها با ($\sqrt{MSE}$) و {میانگین مقدار اریبی} آنها تحت تابع زیان درجه دوم برای $k=h=0/5$

$\hat{b}_{BS}$	طرح	m	n
5/198(1/587){1/178}	$(5,0,0,0,0)$	5	10
10/21(3/651){8/207}	$(2,3,0,0,0)$	5	10
7/723(1/571){2/514}	$(10,0,\ldots,0)$	10	20
16/40(3/469){13/40}	$(3,4,3,0\ldots,0)$	10	20
12/17(1/591){7/828}	$(20,0,\ldots,0)$	30	50

$\hat{b}_{EBS}$	$\hat{b}_{HBS}$
1/791(0/128){0/208}	4/793(1/143){0/967}
1/452(0/201){0/547}	2/818(0/815){0/899}
3/441(0/138){0/558}	10/17(1/576){1/251}
1/818(0/351){0/818}	2/649(0/752){1/649}

جدول 2. میانگین برآوردها با ($\sqrt{MSE}$) و {میانگین مقدار اریبی} آنها تحت تابع زیان آنتروپی برای $k=h=0/5$

$\hat{b}_{BG}$	طرح	n	m
6/553(1/706){1/841}	$(5,0,0,0,0)$	5	10
3/504(1/255){1/551}	$(2,3,0,0,0)$	5	10
15/06(2/408){5/153}	$(10,0,\ldots,0)$	10	20
7/193(1/532){4/193}	$(3,4,3,0\ldots,0)$	10	20
35/47(4/082){15/47}	$(20,0,\ldots,0)$	30	50
3/033(1/023){2/033}	$(1,4,5,0\ldots,0)$	40	50

$\hat{b}_{EBG}$	$\hat{b}_{HBG}$
1/568(0/113){1/431}	4/199(1/002){1/485}
1/269(0/177){0/630}	2/468(0/714){0/646}
3/207(0/129){6/792}	9/486(1/469){1/245}
2/584(0/199){0/415}	5/047(0/861){2/047}
26/35(0/156){2/742}	22/52(2/881){3/270}
1/649(0/328){0/693}	2/470(0/701){1/470}

جدول 3. میانگین برآوردها با ($\sqrt{MSE}$) و {میانگین مقدار اریبی} آنها تحت تابع زیان لاینکس برای $k=h=0/5$

$\hat{b}_{BL}$	طرح	m	n
5/753(1/201){3/158}	$(5,0,0,0,0)$	5	10
3/405(1/046){1/435}	$(2,3,0,0,0)$	5	10
12/06(1/522){2/243}	$(10,0,\ldots,0)$	10	20
6/581(1/203){3/581}	$(3,4,3,0\ldots,0)$	10	20
26/35(2/310){6/961}	$(20,0,\ldots,0)$	30	50
3/014(0/939){2/015}	$(1,4,5,0\ldots,0)$	40	50

$\hat{b}_{HBL}$	$\hat{b}_{EBL}$
1/666(0/114){1/333}	2/621(0/692){2/378}
1/361(0/183){0/638}	1/452(0/465){0/641}
3/197(0/121){1/802}	5/659(0/955){1/340}
2/610(0/190){0/389}	2/786(0/528){0/483}
6/322(0/140){3/672}	13/12(1/727){6/871}
1/741(0/326){0/741}	1/308(0/382){0/385}

نتایج جدول‌های 1 تا 3 نشان‌دهنده آن است که تحت هر سه تابع زیان درجه دوم، آنتروپی و لاینکس برآوردگر بیزی سلسله مراتبی پارامتر اسکالر توزیع وایبول از برآوردگرهای بیزی و E-بیزی بهتر و همچنین برآوردگر E-بیز از برآوردگر بیزی بهتر است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از طرح سانسور فزآینده نوع دوم برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر اسکالر توزیع وایبول تحت توابع زیان درجه دوم، آنتروپی و لاینکس به دست آمد؛ سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و به کمک معیارهای اریبی و جذر میانگین مربعات خطای برآوردگرها نشان داده شد که برآورد بیزی سلسله مراتبی از برآوردهای E-بیز و بیزی و برآورد E-بیز نیز از برآورد بیزی بهتر است.

References

Balakrishnan, N. and Cohen, A.C. (1991). Order Statistics and Inference: Estimation Methods.Academic Press, San Diego.

Balakrishnan, N. and Sandhu, R.A.A (1995). Simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. The Amer. Statist. 49, 229-230.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications. Birkh auser, Boston - 215.

Balakrishnan, N. and Asgharzadeh, A. (2005). Inference for the scaled halflogistic distribution based on progressively Type II censored samples. Commun. Statist. Theory Meth. 34, 73- 87.

Berger, J. O. (1985). Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, second ed., Springer-Verlag, New York.

Balakrishnan, N and Katen, M. (2008). On the maximum likelihood estimation of parameters of Weibull distribution based on complete and censored data, Statistics and Probability Letters, 78(17), 2971- 2975.

Cho, Y., Sun, H. and Lee, K. (2015), Estimating the Entropy of a Weibull Distribution under Generalized Progressive Hybrid Censoring, Entropy, 17, 102-122.

Canavos, G.C. and Taokas, C. (1973). Bayesian Estimation of Life Parameters in the Weibull Distribution, Operations Research, 755-763.

Guure, C.B., Ibrahimi, N.A. and Mohammed Ahmed, A.O. (2012). Bayesian Estimation of Two-Parameter Weibull Distribution Using Extension of Jeffreys' Prior Information with Three Loss Functions, Mathematical Problems in Engineering, doi: 10.1155/-2012/589640.

Han, G.J. and Shapiro, S.S. (1967). Statistical Models in Enginearing, John, Wiley and Sons.

Han, M. (1997). The structure of hierarchical prior distribution and its applications, Chinese Operations Research and Management Science, 6(3), 31-40.

Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate, Applied Mathematical Modelling, 33(4), 1915-1922.

Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution, Applied Mathematical Modelling, 35, 2419-2424.

Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). Continuous Univariate Distributions, Vol. 2, 2nd ed., John Wiley and Sons.

Jaheen, Z.F. and Okasha, H.M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring, Applied Mathematical Modelling, 35, 4730-4737.

Lindley, D.V. and Smith, A.F. (1972). Bayes estimation for the linear model, Journal of the Royal Statistical Society-Series B, 34, 1–41.

Reyad, H., Younis, A. M. and Alkhedir, A. (2016). Comparison of estimates using censored samples from Gompertz model: Bayesian, E-Bayesian, hierarchical Bayesian and empirical Bayesian schemes, International Journal of Advanced Statistics and Probability, 4(1), 47-61.

Reyad, H., Younis, A. M. and Alkhedir, A. (2016). Quasi-E-Bayesian criteria versus quasi-Bayesian, quasi-hierarchical Bayesian and quasi-empirical Bayesian methods for estimating the scale parameter of the Erlang distribution, International Journal of Advanced Statistics and Probability, 4(1), 62-74.

Reyad, H., Younis, A. M. and Ahmad, O. (2016). Quasi-E-Bayesian Estimation of the Frechet Model, British Journal of Mathematics and Computer Science, 4(1), 62-74.

Wang, J.; Li, D. and Chen, D. (2012). E-Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, Systems Engineering Procedia, 3, 282 – 289.