Statistical Sciences Extension
Vol. 2, No. 1, Winter 2017, (P 31-42)

گسترۀ علوم آماری
سال دوم، شماره اول، پاییز و زمستان 1395، (ص 31-42)

آزمون فرضیهٔ آماری روی بردارهای میانگین یکنوا در توزیع‌های نرمال چندمتغیره: قضایا و کاربردها

ابوذر بازیاری*[1]، زهرا الماس‌پور[2]، زهرا حیدری[3]

1. استادیار، گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر
2. کارشناس ارشد، گروه آمار ریاضی، دانشگاه خلیج فارس بوشهر
3. کارشناس ارشد، گروه آمار ریاضی، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تاریخ دریافت: 1394/09/05 **تاریخ پذیرش**: 1395/12/16

Statistical Hypothesis Testing on Monotonic Mean Vectors in Multivariate Normal Distributions: Theories and Applications

A. Bazyari*[1], Z. Almaspoor[2], Z. Heidari[3]

1. Assistant Professor, Department of Statistics, Persion Gulf University, Bushehr
2. M.Sc, Department of Mathematical Statistics, Persion Gulf University, Bushehr
3. M.Sc, Department of Mathematical Statistics, Persion Gulf University, Bushehr

Received: 2015/11/26 **Accepted:** 2017/03/06

Abstract

Statistical hypothesis testing of ordered mean vectors Against all hypotheses on the means vector in multivariate normal distributions is considered. This problem of testing is investigated for known variance covariance matrices and unknown, but equal variance covariance matrices. When the covariance matrices are known, the test statistic is derived and upper bound of p-value is obtained. When the covariance matrices are completely unknown and equal, a test statistic based on the orthogonal projections on the closed convex cones is proposed and the null distribution of the test statistic derived. The critical values are estimated using simulation method. Also, the results are presented with application examples.

Keywords

Closed Convex Cone, Multivariate Normal Distribution, Ordered Means Hypothesis Testing, Simulation, Test Statistic.

چکیده

آزمون فرضیهٔ مرتب شدهٔ بردارهای میانگین در مقابل فرضیهٔ تمام حالات ممکن روی بردارهای میانگین در جامعه‌های نرمال p-متغیره در نظر گرفته شده است. این مسئله آزمون برای حالت معلوم بودن ماتریس‌های واریانس کوواریانس و نیز حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس کاملاً مجهول اما برابر باشند، مورد بررسی قرار گرفته شده است. برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس معلوم باشند، آمارهٔ آزمون محاسبه و کران بالای مقادیر احتمال به دست آمده‌اند در حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس کاملاً مجهول و برابر باشند، آماره آزمونی بر اساس تصاویر متعامد روی مخروط‌های محدب بسته محاسبه و توزیع تحت فرضیهٔ صفر آن به دست آمده است. با روش شبیه‌سازی، مقادیر بحرانی در سطوح معناداری برآورد شده‌اند. همچنین نتایج با مثال‌های کاربردی بررسی شده‌اند.

واژگان کلیدی

آزمون فرضیهٔ مرتب شده، آمارهٔ آزمون، توزیع نرمال چندمتغیره، شبیه‌سازی، مخروط محدب بسته.

*Corresponding Author: ab_bazyari@yahoo.com

*** نویسنده مسئول**: ابوذر بازیاری

مقدمه

فرض کنید $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ بردارهای تصادفی و مستقل دارای تابع چگالی نرمال p-متغیره، $N_p(\mu_i, \Sigma_i)$، با بردارهای میانگین مجهول μ_i و ماتریس واریانس کوواریانس ناویژه Σ_i، $i = 1, 2, \dots, k$ باشد. در این مقاله مسئلهٔ آزمودن فرضیهٔ یکنوای

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k$$

در مقابل تمام حالات ممکن روی بردارهای میانگین در نظر گرفته شده، به‌طوری‌که برای هر $i, j = 1, 2, \dots, k$، $\mu_i \leq \mu_j$، به این معنی است که iامین مقادیر بردارهای میانگین غیر منفی هستند.

چنین آزمون‌هایی که دارای محدودیت هستند، آزمون‌های محدود شده نامیده می‌شود. این محدودیت‌ها می‌تواند در فرضیهٔ صفر یا در فرضیهٔ مقابل باشند.

اولین بار ون‌ایدن[1] (1958)، این مسئله را برای توزیع نرمال یک‌متغیره[2] مورد بررسی قرارداد.

وی مسئله آزمون فرضیه[3] با محدودیت مرتب شده $\boldsymbol{\mu}_1 \leq \boldsymbol{\mu}_2 \leq \cdots \leq \boldsymbol{\mu}_k$ در مقابل تمام محدودیت‌ها را در نظر گرفت و آماره آزمون[4] را ارائه و سپس ویژگی‌های آن را مورد مطالعه قرار داد. بارتولومو[5] (1959a)، آزمون تساوی بردارهای میانگین در مقابل میانگین‌های مرتب شده در k جامعه نرمال یک متغیره را مورد بحث قرار داد. وی آمارهٔ آزمون و توزیع[6] تحت فرضیه صفر آن را در دو حالت ماتریس‌های واریانس کوواریانس معلوم و حالت دیگر ماتریس‌های واریانس کوواریانس[7] مجهول به دست آورده است. (جزییات بیشتر در بارتولومو، 1959b).

1. Van Eden
2. Univariate Normal
3. Hypothesis Test
4. Test Statistic
5. Bartholomew
6. Distribution
7. Covariance Matrices

در واقع روش استفاده شده برای برآورد پارامترها با محدودیت مرتب‌شده الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس[8] بود.

این مسئله را با پارامترهای میانگین مجهول شوراک[9] (1967) و کودو و یاعو[10] (1982) مورد بررسی قرار داده‌اند. بحث و بررسی بیشتر در مورد آزمون فرضیه با قیدهای مرتب شده را بارلو و همکاران[11] (1972)، رابرتسون و ویگمن[12] (1988) و سیل واپول و سن[13] (2005) انجام داده‌اند. رابرتسون و ویگمن (1978)، آزمون فرضیهٔ یک‌طرفه k میانگین جامعهٔ نرمال یک متغیره در مقابل این فرضیه که آمارهٔ مربوطه را با روش نسبت درست‌نمایی[14] محاسبه و سپس توان آن را با شبیه‌سازی به دست آورده است. این مسئله آزمون توسط ساسابوچی (1980)، برای حالت چندمتغیره بسط داده شده است.

آندرسون[15] (1984)، آزمون تساوی k میانگین جامعه نرمال چندمتغیره[16] در مقابل این فرضیه که محدودیتی روی میانگین‌ها نباشد، مورد مطالعه قرار داده است. ساسابوچی و همکاران[17] (1983)، تعمیم کار بارتولومو را با فرض معلوم بودن ماتریس‌های واریانس کوواریانس ضمن به دست آوردن آمارهٔ آزمون تساوی میانگین‌ها در مقابل میانگین‌های مرتب شده در توزیع نرمال $p-$ متغیره با روش نسبت درست‌نمایی الگوریتمی را نیز برای محاسبهٔ برآورد رگرسیون همنوای دومتغیره پیشنهاد دادند. کولاتونگا و همکاران[18] (1990)، آزمون فرضیهٔ بردار میانگین مرتب شده را در نظر گرفته و برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس قطری نباشند، آزمون‌هایی را پیشنهاد و با روش شبیه‌سازی آنها را مورد

8. Pool-Adjacent Violators Algorithm
9. Shorack
10. Kudo and Yao
11. Barlow et al.
12. Robertson and Wegman
13. Silvapulle and Sen
14. Likelihood Ratio
15. Anderson
16. Multivariate Normal
17. Sasabuchi et al.
18. Kulatunga et al.

مطالعه قرار دادند. ساسابوچی و همکاران (1992)، الگوریتمی را برای محاسبهٔ رگرسیون همنوای چندمتغیره ارائه داده‌اند.

فرناندو و کولاتونگا[1] (2007)، برنامه‌ای را با نرم‌افزار فورترن برای محاسبه رگرسیون همنوای چندمتغیره پیشنهاد و هم‌گرایی این الگوریتم را برای ابعاد بزرگ‌تر مساوی با عدد پنج با روش شبیه‌سازی[2] بررسی کردند. هنسوم و هو[3] (2012)، ضمن ارائه چارچوب کلی برای رگرسیون همنوای چندمتغیره، یک الگوریتم برای محاسبه رگرسیون همنوای چندمتغیره ارائه کرده‌اند.

بازیاری (2016)، آزمون فرضیهٔ تساوی بردارهای میانگین در مقابل فرضیهٔ مرتب‌شدهٔ میانگین‌ها را با فرض مجهول و نابرابر بودن ماتریس‌های واریانس کوواریانس در نظر گرفت. آماره آزمون را با استفاده از بوت استرپ محاسبه و نیز مقادیر بحرانی آن را برای سطوح مختلف معناداری محاسبه کرد.

مقاله حاضر در شش بخش به صورت زیر تنظیم شده است:

در بخش دوم، تعاریف و لم‌هایی در ارتباط با مخروط‌های محدب بسته که در ادامه مقاله مورد نیاز هستند، ارائه می‌شود. در بخش سوم، آمارهٔ آزمون فرضیهٔ مرتب شدهٔ بردارهای میانگین در مقابل فرضیهٔ تمام حالات بردارهای میانگین در جامعهٔ نرمال $p-$ متغیره با ماتریس‌های واریانس کوواریانس معلوم بر اساس مخروط‌های محدب بسته محاسبه شده است. همچنین کران بالای مقادیر احتمال[4] به دست آمده است.

در بخش چهارم، ضمن محاسبهٔ آمارهٔ آزمون فرضیهٔ مرتب شدهٔ بردارهای میانگین توزیع نرمال چندمتغیره با ماتریس واریانس کوواریانس مجهول و برابر، توزیع تحت فرضیه صفر آن آماره نیز به دست آمده است. همچنین با روش شبیه‌سازی، مقادیر بحرانی در سطوح معناداری برآورد شده‌اند. در بخش پنجم، اثبات لم‌های ارائه شده در متن مقاله، آورده شده است. در بخش ششم، نتایج عددی بیان شده‌اند.

تعاریف و نتایج اولیه در ارتباط با مخروط‌های محدب بسته

در این بخش تعاریفی بر پایهٔ مخروط‌های محدب بسته آورده شده است.

تعریف 1: فرض کنید $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k)'$ و $\mathbf{y}=(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k)'$ بردارهای $p-$ بعدی در فضای اقلیدسی $R^{p\times k}$ باشند. برای هر ماتریس معین مثبت Σ با ابعاد $p\times p$، ضرب داخلی در فضای $R^{p\times k}$ به صورت

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>_\Sigma=\sum_{i=1}^{k} n_i \mathbf{x}_i'\Sigma^{-1}\mathbf{y}_i$$

$$=(\mathbf{x}_1',\ldots,\mathbf{x}_k')\begin{pmatrix} n_1\Sigma^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k\Sigma^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1\\ \vdots \\ \mathbf{y}_k\end{pmatrix}$$

تعریف می‌شود. همچنین نرم $\|\cdot\|_\Sigma$ در فضای اقلیدسی $R^{p\times k}$ عبارت است از: $\|\mathbf{x}\|_\Sigma=<\mathbf{x},\mathbf{y}>_\Sigma^{1/2}$.

تعریف 2: برای ماتریس‌های $q\times r$، $A=(a_{ij})$ و $s\times t$، $B=(b_{kl})$ ضرب کرونکر آنها را با نماد $A\otimes B$ نشان می‌دهند و به صورت

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1r}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1}B & \cdots & a_{qr}B\end{pmatrix}$$

تعریف می‌شود.

برای هر $\boldsymbol{X}\in R^{p\times k}$ تصویر متعامد $\boldsymbol{X}$ داخل $\mathcal{C}$ با نماد $\pi_\Lambda(\boldsymbol{X}_i;\,\mathcal{C})$ نشان داده می‌شود؛ بنابراین $\pi_\Lambda(\boldsymbol{X}_i;\,\mathcal{C})$ نقطه‌ای است که عبارت $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}\|_\Lambda$ را برای هر $\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{\mathcal{C}}$ مینیمم می‌کند.

اگر $\boldsymbol{X}\in\mathcal{C}$؛ بنابراین $\pi_\Lambda(\boldsymbol{X};\,\mathcal{C})=\boldsymbol{X}$ خواهد بود.

1. Fernando and Kulatunga
2. Simulation
3. Hansohm and Hu
4. P-value

تعریف 3: فرض کنید $\mathcal{C}$ یک زیر مجموعه غیرتهی در فضای اقلیدسی باشد. $\mathcal{C}$ را یک مخروط محدب گویند اگر برای $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathcal{C},\gamma\ge 0,\lambda\ge 0$ آنگاه $\lambda\boldsymbol{X}+\gamma\boldsymbol{Y}\in\mathcal{C}$. همچنین $\mathcal{C}$ را یک مخروط محدب بسته گویند اگر اولاً مخروطی محدب و ثانیاً یک مجموعه بسته باشد.

مخروط‌های محدب بسته زیر را در نظر بگیرید:

$$c_0=\left\{\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}_k\end{pmatrix}\middle|\ \boldsymbol{\mu}_1\le\ldots\le\boldsymbol{\mu}_k,\ \boldsymbol{\mu}_i\in R^{pk},\ i=1,2,\ldots,k\right\}$$

$$L=\left\{\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}_k\end{pmatrix}\middle|\ \boldsymbol{\mu}_i\in R^{pk},\ i=1,2,\ldots,k\right\},$$

که در آن تحت مخروط محدب L هیچ محدودیتی روی بردار پارامتر $\boldsymbol{\mu}_i$ها نیست و مخروط محدب $\mathcal{C}$ اجتماعی از ماتریس‌های همنوا در فضای اقلیدسی $R^{p\times k}$ است.

لم 1: فرض کنید برای $n=1,2,\ldots$،

$$A_n=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\middle|\ x\le 0,\ y\le -nx,\ x,y\in R^1\right\}$$

باشد. آنگاه:

الف) برای $n=1,2,\ldots$، A_n یک مخروط محدب بسته در R^2 است.

ب) برای $n=1,2,\ldots$، $A_n\subset A_{n+1}$

ج) $\bigcup_{n=1}^{k}A_n=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\middle|\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\middle|\ x>0,\ y\le 0\right\}$

(اثبات: به (ساسابوچی و همکاران، 2003) مراجعه شود).

محاسبهٔ آمارهٔ آزمون با ماتریس واریانس کوواریانس معلوم بر پایهٔ مخروط‌های محدب بسته

برای محاسبهٔ آمارهٔ آزمون بر پایه مخروط‌های محدب بسته، ابتدا لازم است که تصویر متعامد بردارهای مجهول $\boldsymbol{\mu}_i$ روی مخروط‌های محدب بسته $\mathcal{C}_0,L$ به دست آورده شود. برای هر $\boldsymbol{X}\in R^{p\times k}$ ماتریس یکتای $\boldsymbol{X}\in\mathcal{C}_0$ وجود دارد که برای $\boldsymbol{Y}\in\mathcal{C}_0$ در رابطه $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|_\Sigma\le\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\Sigma$ صدق می‌کند.

$\mathbf{x}^*$ را تصویر $\mathbf{x}$ داخل c_0 نامیده می‌شود و با $p_\Sigma(\mathbf{x};c)$ نشان داده می‌شود. در حقیقت برای هر $\mathbf{x}\in R^{pk}$، $p_L(\mathbf{x}_i;c)$ را تصویر متعامد $\mathbf{x}$ داخل c_0 نامیده می‌شود؛ بنابراین $p_\Sigma(\mathbf{x}_i;c)$ نقطه‌ای است که عبارت $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_L$ را برای هر $\mathbf{z}\in C$ مینیمم می‌کند.

پس آمارهٔ آزمون برحسب مخروط‌های محدب بسته c_0,L به صورت

$$\begin{aligned}T&=\sum_{i=1}^{k}n_i(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\bar{\mathbf{x}}_i)'\Sigma^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\bar{\mathbf{x}}_i)\\&=\sum_{i=1}^{k}n_i[p_\Sigma(\mathbf{x}_i,c_0)-p_\Sigma(\mathbf{x}_i,L)]'\Sigma^{-1}[p_\Sigma(\mathbf{x}_i,c_0)-p_\Sigma(\mathbf{x}_i-L)]\\&=\|p_\Sigma(\mathbf{x},c_0)-p_\Sigma(\mathbf{x},L)\|_\Sigma^2\\&=\langle p_\Sigma(\mathbf{x},c_0)-p_\Sigma(\mathbf{x},L),p_\Sigma(\mathbf{x},c_0)-p_\Sigma(\mathbf{x},L)\rangle_\Sigma,\end{aligned}$$

است که در آن $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)'$ بردارهای p-بعدی در فضای اقلیدسی R^{pk} و توزیع T مستقل از $\boldsymbol{\mu}$ و Σ است و با نماد $T(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ نشان داده می‌شود.

با تعریف $\mathbf{z}=\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}$ بدیهی است که $\mathbf{z}$ دارای توزیع $N_p(0,\Sigma)$ است. با توجه به اینکه برای هر مخروط c_0 که $\boldsymbol{\mu}\in c_0$، $T(\boldsymbol{\mu},\Sigma)=T(0,\Sigma)$، بنابراین p-مقدار آماره آزمون عبارت است از:

$$\begin{aligned}p\text{-value}&=\sup_{\boldsymbol{\mu}\in c_0}P(T(\boldsymbol{\mu},\Sigma)>t_{ob})\\&=P(T(\boldsymbol{\mu}=0,\Sigma)>t_{ob}),\end{aligned}$$

که در آن t_{ob} مقدار مشاهده شده آماره $T(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ است.

کران بالای مقدار احتمال

فرض کنید محدودیت‌های مرتب شده روی تمام سطرهای بردار $\boldsymbol{\mu}$ داخل مخروط محدب بسته C_0 باشد. برای h امین سطر، $\boldsymbol{\mu} \in C_0$ و

$$c_h = \{\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k) \in R^{pk} \mid \boldsymbol{\mu}_i \le_h \boldsymbol{\mu}_j , \}$$

برای $h = 1, 2, .., p$ آماره

$$T_h = T_h(\boldsymbol{\mu}) = \left\| \pi_\Sigma(\mathbf{x}, c_.) - \pi_\Sigma(\mathbf{x}, c_h) \right\|_\Sigma^2 ,$$

پیشنهاد می‌شود.

لم 2: اگر M ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه:

الف) $T = \left\| \pi_{M\Sigma M'}(M\mathbf{x}, Mc_.) - \pi_{M\Sigma M'}(M\mathbf{x}, ML) \right\|_\Sigma^2$

ب) $T_h = \left\| \pi_{M\Sigma M'}(M\mathbf{x}, Mc_.) - \pi_{M\Sigma M'}(M\mathbf{x}, Mc_h) \right\|_\Sigma^2$

ج) $T_h \ge T$

(اثبات لم در بخش 5 داده شده است.)

فرض کنید $\boldsymbol{\mu} = 0$ و $U = MX$ باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} T_h(U) &= \left\| \pi_\Sigma(U, Mc_.) - \pi_\Sigma(U, Mc_h) \right\|_\Sigma^2 \\ &= \left\| \pi_{M\Sigma M'}(M\mathbf{x}, Mc_.) - \pi_{M\Sigma M'}(M\mathbf{x}, Mc_h) \right\|_{M\Sigma M'}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

با مقایسهٔ رابطه (1) با قسمت (ب) لم (2) به وضوح معلوم است که $T_h = T_h(U)$. اما از آنجا که $T_h \ge T$ است؛ بنابراین $T_h(U) \ge T$ است.

همچنین $E(U) = 0$ و $\Sigma_U = I$ است. اگر G را ماتریس متعامد متقارن در نظر بگیرید، با تجزیه AD از $(G\Sigma G)^{1/2}$، $AD = (G\Sigma G)^{1/2}$ که در آن A یک ماتریس متعامد و D یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است. فرض کنید $M = GDG$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \Sigma_U = \Sigma_{MX} &= M\Sigma M' = (GDG)\Sigma(GDG)' \\ &= (GD)(G\Sigma G)(D'G) \\ &= (GA'AD)(G\Sigma G)(D'A'AG) \\ &= (GA')(AD)(G\Sigma G)(AD)'(AG) \\ &= (GA')(G\Sigma G)^{-1/2}(G\Sigma G)(G\Sigma G)^{-1/2}(AG) = I \ . \end{aligned}$$

بنابراین آمارهٔ U دارای توزیع $N_p(0, I)$ است. پس:

$$p(T(0,\Sigma) > t_{ob}) \le p(T_h(0, I) > t_{ob}) = p(T_h(U) > t_{ob}).$$

برای مقادیر مشاهده شده $t_{ob} > 0$، مقدار احتمال عبارت است از:

$$p\text{-value} = \sup_{\boldsymbol{\mu} \in c_0} p(T(\boldsymbol{\mu}) > t_{ob}) = P(T(0,\Sigma) > t_{ob}) \le P(T_h(0,\Sigma) > t_{ob}).$$

بنابراین برای $h = 1, 2, \ldots, p$، $p(T_h(0,\Sigma) > t_{ob})$ را کران بالایی برای مقدار احتمال آماره آزمون فرضیه H_0 در مقابل H_1 تعریف می‌شود.

محاسبهٔ آمارهٔ آزمون با ماتریس واریانس کوواریانس مجهول بر پایه مخروط‌های محدب بسته

فرض کنید بردارهای $\mathbf{x}$ و $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ به صورت

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}_k \end{pmatrix}, \ \hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_k \end{pmatrix},$$

تعریف شود. آماره T به صورت

$$T=\left\|\hat{\boldsymbol{\mu}}-\mathbf{x}\right\|_s^2,$$

پیشنهاد می‌شود، که در آن $S=\sum_i\sum_j(\mathbf{x}_{ij}-\bar{\mathbf{x}}_{ij})(\mathbf{x}_{ij}-\bar{\mathbf{x}}_{ij})'$، $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\mu}}_k)$ رگرسیون همنوای p - متغیره $(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k)$ با وزن‌های $n_1S^{-1},\ldots,n_kS^{-1}$ است. اکنون مخروط‌های محدب

$$c_0=\left\{\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}_k\end{pmatrix}\middle|\ \boldsymbol{\mu}_1\le\cdots\le\boldsymbol{\mu}_k,\ \boldsymbol{\mu}_i\in R^{pk},\ i=1,2,\ldots,k\right\}$$

$$c_1=\left\{\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}_k\end{pmatrix}\middle|\ \boldsymbol{\mu}_i\in R^{pk},\ i=1,2,\ldots,k\right\},$$

که در آن تحت مخروط محدب c_1 هیچ محدودیتی روی بردار پارامتر μ_iها نیست، را در نظر بگیرید. $p_S(\mathbf{x};c)$ نقطه‌ای است که عبارت $\left\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right\|_s^2$ را مینیمم می‌کند، که در آن $\boldsymbol{\mu}\in c_0$ و $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\mu}}_k)$ رگرسیون همنوای چندمتغیره تحت فرضیه H_0 می‌شود. بنابراین

$$T=\left\|p_s(\mathbf{x},c_0)-\mathbf{x}\right\|_s^2.$$

اگر $H_1:\boldsymbol{\mu}_1=\cdots=\boldsymbol{\mu}_k$، آنگاه آماره T در قالب قضیه (1) بیان می‌شود.

قضیه 1: تحت فرضیه H_1 توزیع آماره T مستقل از $\boldsymbol{\mu}_0$ است.

اثبات: بردار تصادفی $\mathbf{y}$ به صورت

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{y}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1-\boldsymbol{\mu}_0\\ \vdots\\ \bar{\mathbf{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_0\end{pmatrix}=\mathbf{x}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_0\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}_0\end{pmatrix},$$

تعریف می‌شود. بنابراین واضح است که $\mathbf{y}$ مستقل از $\boldsymbol{\mu}_0$ بوده و دارای توزیع $N_p\left(0,\frac{S_i}{n_i}\right)$ است. از طرفی دیگر

$$\begin{aligned}T&=\left\|p_s(\mathbf{x},c_0)-\mathbf{x}\right\|_s^2\\&=\left\|p_s(\mathbf{y},c_0)-\mathbf{y}\right\|_s^2.\end{aligned}$$

چون $\left\|p_s(\mathbf{y},c_0)-\mathbf{y}\right\|_s^2$ مستقل از $\boldsymbol{\mu}_0$ است، بنابراین توزیع آماره T مستقل از $\boldsymbol{\mu}_0$ است، اگر $\boldsymbol{\mu}_.=0$، آنگاه توزیع T نیز مستقل از S است. برای حل مسئلهٔ آمارهٔ آزمون

$$\bar{T}=\frac{1}{s_{11}}\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{\mathbf{x}}_{i1}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_{i1})^2,$$

معرفی می‌شود، که در آن $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{11},\ldots,\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ikj})$ رگرسیون همنوای یک‌متغیره $\bar{\mathbf{x}}_{11},\ldots,\bar{\mathbf{x}}_{k1}$ با وزن‌های $n_1,\ldots,n_k$ هستند. مخروط محدب بسته c_2 را در نظر بگیرید:

$$c_2=\left\{\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}_k\end{pmatrix}\middle|\ \boldsymbol{\mu}_{11}\le\cdots\le\boldsymbol{\mu}_{k1},\ \boldsymbol{\mu}_i\in R^{pk},\ i=1,2,\ldots,k\right\}.$$

آنگاه آمارهٔ T^* به صورت

$$T^*=\left\|p_s(\mathbf{y},c_0)-\mathbf{y}\right\|_s^2,$$

تعریف می‌شود.

لم 3: فرض کنید $\mathbf{x} \in R^{pk}$ باشد، برای هر ماتریس $p \times p$ ناویژه B خواهیم داشت:

$$\|\pi_L(\mathbf{x},c) - \mathbf{x}\|_L = \|\pi_{BLB'}((I_k \otimes B)X, (I_k \otimes B)c - (I_k \otimes B)\mathbf{x})\|_{BLB'}.$$

لم 4: تحت فرضیهٔ H_1 توزیع T^* مستقل از $\boldsymbol{\mu}_0$ و Σ می‌باشد.

(اثبات این لم در بخش پنجم مقاله آورده شده است.)

بنابراین با توجه به قضیهٔ (1.3) بازیاری و چینی‌پرداز (2012)، برای آزمون فرضیه H_0 در مقابل فرضیه $H_1 - H_0$ در سطح معناداری α همواره

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\Sigma}\sup_{H_1} P_{\mu,\Sigma}(T \geq t) = \sup_{\Sigma} P_{\mu\in H_1,\Sigma}(T \geq t)\\ &= \sup_{\Sigma} P_{\mu,\Sigma}(T \geq t) = \sup_{\Sigma} P_{0,\Sigma}(T \geq t)\\ &= \sup_{0,I_p}(\overset{\mathbf{v}}{T} \geq t).\end{aligned}$$

شبیه‌سازی مقادیر بحرانی آماره آزمون

مقادیر بحرانی آمارهٔ آزمون با روش شبیه‌سازی برآورد شده‌اند. برای محاسبه آن، کافی است مقدار آمارهٔ T^* برای $\boldsymbol{\mu} = 0$ و $\Sigma = I_p$ محاسبه شود. در این شبیه‌سازی، تعداد $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ داده از توزیع نرمال $N_p(0,I)$ تولید و مقدار آمارهٔ T^* محاسبه شده است. این فرآیند 20000 بار تکرار شده و مقدار α برآورد می‌شود. فرآیند قبل را به تعداد 10 بار تکرار کرده و میانگین 10 عدد به دست آمده را به‌عنوان برآوردی برای α در نظر می‌گیریم. در این شبیه‌سازی سطوح معناداری $\alpha = 0/01, 0/025, 0/05$ در نظر گرفته شده است. همچنین بعد جامعه و تعداد جوامع مورد نظر $(p=3, k=4)$، $(p=4, k=5)$ و $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$، $i = 1,2,\ldots,k$ است. مقادیر بحرانی برآورد شده در جدول 1 آورده شده است.

جدول 1. برآورد مقادیر بحرانی آماره آزمون

			$n_1 = n_2 = \cdots = n_k$		
α	p	k	n_0=5	n_0=10	n_0=15
0/01	3	4	3/87	4/54	1/84
	4	5	4/65	3/21	0/77
0/025	3	4	2/09	1/21	1/13
	4	5	1/66	0/85	0/53
0/05	3	4	1/12	0/66	0/09
	4	5	0/54	0/62	0/46

از داده‌های جدول 1، مشخص است که با افزایش سطح معناداری مقدار بحرانی آزمون در حال کاهش است.

اثبات لم‌ها

اثبات لم 2: اثبات قسمت الف) با استفاده از تعریف ضرب داخلی و با توجه به اینکه M ماتریسی معین مثبت است، برای بردارهای $A = (A_1, \ldots, A_k)$ و $B = (B_1, \ldots, B_k)$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle MA, MB\rangle_{M\Sigma M'} &= \sum_{i=1}^{k} n_i A_i' M' M'^{-1}\Sigma^{-1}M^{-1}B_i\\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i A_i'\Sigma^{-1}B_i = \langle A, B\rangle_{\Sigma}.\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}T &= \|\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_0) - \pi_\Sigma(\mathbf{x},L)\|_\Sigma^2\\ &= \|M\pi_{M\Sigma M'}(\mathbf{x},c_0) - M\pi_{M\Sigma M'}(\mathbf{x},L)\|_{M\Sigma M'}^2.\end{aligned}$$

واضح است که برای هر مخروط محدب بسته c، $M\pi_\Sigma(\mathbf{x},c)=\pi_\Sigma(M\mathbf{x},Mc)$ است. در نتیجه

$$T=\|M\pi_{M\Sigma M'}(\mathbf{x},c_{\cdot})-M\pi_{M\Sigma M'}(\mathbf{x},L)\|^2_{M\Sigma M'}.$$

اثبات قسمت (ب) مشابه قسمت الف است.

اثبات قسمت (ج): ابتدا باید نشان داده شود

$$T_h=T+\|\pi_\Sigma(\mathbf{x},L)-\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_h)\|^2_\Sigma+2u \qquad (2)$$

که در آن $u=<\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_0)-\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_h)>_\Sigma$ است.

فرض کنید $\vartheta_i,\ i=1,2,\ldots,k$ برآوردگر پارامترهای روی مخروط محدب بسته c_h، $h=1,2,\ldots,p$ باشد، بنابراین عبارت سمت راست رابطه (2) به صورت

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{\boldsymbol\mu}-\bar{\mathbf{x}}_i)'\Sigma^{-1}(\hat{\boldsymbol\mu}_i-\bar{\mathbf{x}}_i)+\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{\mathbf{x}}_i-\vartheta_i)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_i-\vartheta_i)+2\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{\boldsymbol\mu}_i-\bar{\mathbf{x}}_i)'\Sigma^{-1}(\hat{\boldsymbol\mu}_i-\vartheta_i)\\
&=\sum_{i=1}^{k} n_i\hat{\boldsymbol\mu}_i'\Sigma^{-1}\hat{\boldsymbol\mu}_i-\sum_{i=1}^{k} n_i\hat{\boldsymbol\mu}_i'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{x}}_i-\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\mathbf{x}}_i'\Sigma^{-1}\hat{\boldsymbol\mu}_i+\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\mathbf{x}}_i'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{x}}_i\\
&+\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\mathbf{x}}_i'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{x}}_i-\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\mathbf{x}}_i'\Sigma^{-1}\vartheta_i-\sum_{i=1}^{k} n_i\vartheta_i'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{x}}_i+\sum_{i=1}^{k} n_i\vartheta_i'\Sigma^{-1}\vartheta_i\\
&+2\sum_{i=1}^{k} n_i\hat{\boldsymbol\mu}_i'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{x}}_i-2\sum_{i=1}^{k} n_i\hat{\boldsymbol\mu}_i'\Sigma^{-1}\vartheta_i-2\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\mathbf{x}}_i'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{x}}_i+2\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\mathbf{x}}_i'\Sigma^{-1}\vartheta_i\\
&=\sum_{i=1}^{k} n_i\hat{\boldsymbol\mu}'\Sigma^{-1}\hat{\boldsymbol\mu}_i-2\sum_{i=1}^{k} n_i\hat{\boldsymbol\mu}_i'\Sigma^{-1}\vartheta_i+\sum_{i=1}^{k} n_i\vartheta_i'\Sigma^{-1}\vartheta_i\\
&=\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{\boldsymbol\mu}'-\vartheta_i)'\Sigma^{-1}(\hat{\boldsymbol\mu}_i-\vartheta_i)=\|\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_0)-\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_h)\|^2_\Sigma=T_h,
\end{aligned}$$

نوشته می‌شود. از طرفی

$$\begin{aligned}
u&=\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{\boldsymbol\mu}_i-\bar{\mathbf{x}}_i)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_i-\vartheta_i)\\
&=<\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_0)-\pi_\Sigma(\mathbf{x},L),\pi_\Sigma(\mathbf{x},L)-\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_h)>_\Sigma.
\end{aligned}$$

(به لم 1-1 (زرانتونلو[1]، 1971)، مراجعه شود).
همچنین $\mathbf{x}^*=\pi_\Sigma(\mathbf{x},c)$ اگر و فقط اگر

$$\mathbf{x}^*\in c\ ,<\mathbf{x}-\mathbf{x}^*,\mathbf{x}>_\Sigma=0$$

و $<\mathbf{x}-\mathbf{x}^*,B>_\Sigma\ge 0$ برای هر $B\in c$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
u&=\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{\boldsymbol\mu}_i-\bar{\mathbf{x}}_i)'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{x}}_i-\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{\boldsymbol\mu}_i-\bar{\mathbf{x}}_i)'\Sigma^{-1}\vartheta_i\\
&=<\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_{\cdot})-\pi_\Sigma(\mathbf{x},L),-\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_h)>_\Sigma\\
&=<\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_{\cdot})-\bar{\mathbf{x}}_i,-\pi_\Sigma(\mathbf{x},c_h)>_\Sigma\ge 0,
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (1) نتیجه می‌شود $T_h\ge T$، و اثبات کامل می‌شود.

اثبات لم 4: فرض کنید $\mathbf{y}$ بردار تصادفی مانند قبل تعریف شود، آنگاه

$$T^*=\|\pi_s(\mathbf{y},c_2)-\mathbf{y}\|^2_s,$$

واضح است که توزیع T^* مستقل از $\boldsymbol\mu_0$ است. فرض کنید W ماتریس $p\times p$ متعامدی باشد، با استفاده از لم (1-5) (ساسابوچی و همکاران، 2003)، برای مخروط محدب بسته c_2 داریم:

$$I_k\otimes(W\Sigma^{-1/2})c_2)=c_2,$$

با استفاده از لم (3)

1. Zarantonello

$$T^* = \left\| \left(I_k \otimes (W\Sigma^{1/2})\right)\mathbf{y} - p_{W\Sigma^{1/2}\Sigma\Sigma^{1/2}W'}\left((I_k \otimes (W\Sigma^{1/2}))\mathbf{y}, (I_k \otimes (W\Sigma^{1/2}))C_2\right) \right\|_{W\Sigma^{1/2}\Sigma\Sigma^{1/2}W'}.$$

حال بردار $\mathbf{z}$ را به صورت

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W\Sigma^{-1/2}\mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ W\Sigma^{-1/2}\mathbf{y}_k \end{pmatrix} = \left(I_k \otimes W\Sigma^{-1/2}\right)\mathbf{y},$$

در نظر بگیرید. اگر $\Sigma^* = W\Sigma^{-1/2}\Sigma\Sigma^{-1/2}W'$، با توجه به لم (1-3) (ساسابوچی و همکاران، 2003) خواهیم داشت:

$$T^* = \left\| p_{\Sigma}(\mathbf{z}, C_2) - \mathbf{z} \right\|_{\Sigma}^2 .$$

از آنجا که متغیرهای $\mathbf{x}_{i1}, \ldots, \mathbf{x}_{in_i}$ مستقل از هم هستند، بنابراین $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k$ نیز از هم مستقل هستند. از طرفی دیگر S^* دارای توزیع ویشارت $W_p(n-k, I)$ می‌باشد و $\mathbf{z}_i$ دارای توزیع $N_p\left(0, \frac{I_p}{n_i}\right)$، $i=1,\ldots,k$ است، بنابراین آماره T^* مستقل از S است.

مثال‌های عددی

در این بخش، با مثال‌های عددی کاربرد آزمون فرضیهٔ میانگین‌های مرتب شده، یکی برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس معلوم و دیگری برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس مجهول باشند، ارائه شده است.

مثال 1. فرض کنید $(\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_{12}, \ldots, \mathbf{X}_{1,25})$، $(\mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_{22}, \ldots, \mathbf{X}_{2,25})$، $(\mathbf{X}_{31}, \mathbf{X}_{32}, \ldots, \mathbf{X}_{3,25})$ و $(\mathbf{X}_{41}, \mathbf{X}_{42}, \ldots, \mathbf{X}_{4,25})$ بردارهای تصادفی دارای توزیع‌های نرمال چهار متغیری به ترتیب با میانگین‌های به ترتیب $\boldsymbol{\mu}_1$، $\boldsymbol{\mu}_2$، $\boldsymbol{\mu}_3$ و $\boldsymbol{\mu}_4$ و نیز ماتریس واریانس کوواریانس

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

باشند. بردارهای میانگین داده‌ها عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{X}}_1 &= (12, 8, 16, 6)' \\ \overline{\mathbf{X}}_2 &= (13.5, 9, 16.5, 7)' \\ \overline{\mathbf{X}}_3 &= (15, 10.4, 13, 10)' \\ \overline{\mathbf{X}}_4 &= (11, 10, 17, 6)' \end{aligned}$$

هدف آزمون کردن فرضیهٔ مرتب شدهٔ

$$H_0: \boldsymbol{\mu}_1 \le \boldsymbol{\mu}_2 \le \cdots \le \boldsymbol{\mu}_k,$$

در مقابل این فرضیه که شامل تمام حالات ممکن روی بردارهای میانگین است. با توجه به داده‌ها، رگرسیون همنوای چندمتغیره بردارهای میانگین عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 &= (12, 8, 15/2, 6)' \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 &= (12/8, 9, 15/2, 7)' \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_3 &= (12/8, 10/2, 15/2, 8)' \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_4 &= (12/8, 10/2, 17, 8)' \end{aligned}$$

همچنین

$$\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}0/142 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0/111 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0/125\end{pmatrix}$$

بنابراین آماره آزمون مقدار $T=15/66$ خواهد شد. در سطح معناداری $\alpha=0/05$، چون $T>15/637$ است، بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

مثال 2. داده‌های انجماد دریاچه مندوتا در کشور آمریکا (LakeMendota) برای 111 سال از کتاب بارلو و همکاران (1972) در جدول (1.5) کتاب مورد نظر است.

بر اساس بارلو و همکاران (1972) و کودو و همکاران (1981) داده‌های دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردارهای میانگین μ_i، $i=1,2,\ldots,111$ و ماتریس‌های واریانس کوواریانس مجهول و برابر هستند.

برای به کارگیری نتایج مقاله حاضر، داده‌های 10 سال اول را در نظر گرفته و بردارهای میانگین آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{\mu}_1=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_{11}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}_2=\begin{pmatrix}\mu_2\\ \mu_{12}\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mu}_3=\begin{pmatrix}\mu_3\\ \mu_{13}\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{\mu}_{10}=\begin{pmatrix}\mu_{10}\\ \mu_{110}\end{pmatrix}$$

در این صورت فرضیه صفر عبارت است از:

$$H_0:\begin{cases}\mu_1\le\mu_2\le\ldots\le\mu_{10}\\ \mu_{11}\le\mu_{12}\le\ldots\le\mu_{110},\end{cases}$$

در مقابل این فرضیه که شامل تمام حالات ممکن روی بردارهای میانگین است. داده‌ها و رگرسیون همنوای آنها به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\text{Data}=\begin{pmatrix}25 & 13 & 2 & 15 & 14 & 21 & 9 & 33 & 25 & 15\\ 21 & 37 & 16 & 36 & 26 & 23 & 19 & 27 & 22 & 49\end{pmatrix}$$

و

$$\text{BIR}=\begin{pmatrix}40/3 & 40/3 & 40/3 & 29/2 & 29/2 & 15 & 15 & 73/3 & 73/3 & 73/3\\ 21 & 103/4 & 103/4 & 103/4 & 103/4 & 103/4 & 103/4 & 103/4 & 103/4 & 49\end{pmatrix}$$

آماره آزمون با $p=2$ و $k=10$ مقدار عددی $T=0/0414$ است. در سطح معناداری $\alpha=0/05$، چون $T<0/969$ است، بنابراین فرضیه صفر رد نمی‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، آزمون فرضیهٔ مرتب شدهٔ بردارهای میانگین در مقابل فرضیه تمام حالات ممکن روی بردارهای میانگین در جامعه‌های نرمال p - متغیره در نظر گرفته شد.

آزمون برای حالت معلوم بودن ماتریس‌های واریانس کوواریانس و نیز حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس کاملاً مجهول و برابر باشند، بررسی شد.

برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس معلوم باشند، آماره آزمون بر اساس مخروط‌های محدب بسته محاسبه، آمارهٔ آزمون جدیدی برای محاسبه مقدار احتمال آمارهٔ آزمون پیشنهاد شد.

برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس کاملاً مجهول و برابر باشند، آماره آزمونی بر اساس تصاویر متعامد روی مخروط‌های محدب بسته به دست آمد و توزیع تحت فرضیه صفر آن محاسبه شد. نتایج ارائه شده در مقاله با مثال‌های عددی بررسی شدند.

تقدیر و تشکر: نویسندگان از سردبیر محترم نشریهٔ «گسترهٔ علوم آماری» و داوران محترم به خاطر پیشنهادهای ارزشمندشان نهایت تشکر را دارند.

منابع

[1] Anderson, T. W. (1984). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. 2nd edition, John Wiley, New York.

[2] Barlow, R.E., Bartholomew, D.J., Bremner, J.M. and Brunk, H.D. (1972). Statistical Inference under Order Restrictions: The Theory and Application of Isotonic Regression. New York: John Wiley.

[3] Bartholomew, D.J. (1959a). A test of homogeneity for ordered alternatives. Biometrika, **46**, 36-48.

[4] Bartholomew, D.J. (1959b). A test of homogeneity for ordered alternatives II. Biometrika, **46**, 328-335.

[5] Bazyari, A. (2012). On the Computation of Some Properties of Testing Homogeneity of Multivariate Normal Mean Vectors against an Order Restriction. METRON, Italian International Journal of Statistics, **70**(1), 71-88.

[6] Bazyari, A. and R. Chinipardaz (2012). A Test for Order Restriction of Several Multivariate Normal Mean Vectors against all Alternatives when the Covariance Matrices are Unknown but Common. Journal of Statistical Theory and Applications, **11**(1), 23-45.

[7] Bazyari, A and Pesarin, F. (2013). Parametric and Permutation Testing for Multivariate Monotonic lternatives. Statistics and Computing, **23**, 639–652.

[8] Bazyari, A. (2016). Bootstrap Approach to Test the Homogeneity of Order Restricted Mean Vectors when the Covariance Matrices are Unknown. DOI: 10.1080/03610918.2016.123, Accepted for Publication in Communications in Statistics, Computation and Simulation.

[9] Fernando W.T.P.S. and Kulatunga D.D.S. (2007). On the computation and aome application of multivariate isotonic regression. Computational Statistics and Data Analysis, **52**, 702-712.

[10] Hansohm J. and Hu X. (2012). A convergent algorithm for a generalized multivariate isotonic regression problem. Statistical Papers, **53**, 107-115.

[11] Kudo A. and Yao J.S. (1982). Tables for testing ordered alternatives in an analysis of variance without replication. Biometrika, **69**(1), 237-238.

[12] Kulatunga, D.D.S., Inutsuka, M. and Sasabuchi, S. (1990). A Simulation Study of Some Test Procedures for Testing Homogeneity of Mean Vectors against Multivariate Isotonic Alternatives. Tech. Rep., Tokuyama Univ., Japan.

[13] Robertson, T. and Wegman, E.T. (1978). Likelihood ratio tests for order restrictions in exponential families. Ann. Statist., **6**(3), 485-505.

[14] Robertson, T., Wright, F.T. and Dykstra, R.L. (1988). Order Restricted Statistical Inference. New York: John Wiley.

[15] Shorack, G.R. (1967). Testing against ordered alternative in model I analysis of variance: normal theory and nonparametric. Ann. Math. Statist., **38**, 1704-1753.

[16] Sasabuchi, S. (2007). More powerful tests for homogeneity of multivariate normal mean vectors under an order restriction. Sankhya, **69**(4), 700-716.

[17] Sasabuchi, S., Inutsuka, M. and Kulatunga, D.D.S. (1983). A multivariate version of isotonic regression. Biometrika, **70**, 465-472.

[18] Sasabuchi, S., Inutsuka, M. and Kulatunga, D.D.S. (1992). An algorithm for computing multivariate isotonic regression. Hiroshima Math. J., **22**, 551-560.

[19] Sasabuchi, S., Kulatunga, D.D.S. and Saito, H. (1998). Comparison of powers some tests for testing homogeneity under order restrictions in multivariate normal means. Amer. J. Mathemat. Management Sci., **18**, 131-158.

[20] Sasabuchi, S., Tanaka, K. and Takeshi, T. (2003). Testing homogeneity of multivariate normal mean vectors under an order restriction when the covariance

matrices are common but unknown. Ann. Statist., **31**(5), 1517-1536.

[21] Silvapulle, M.J. and Sen, P.K. (2005). Constrained Statistical Inference: Inequality, Order, and Shape Restrictions. New York: John Wiley.

[22] van Eeden, C. (1958). Testing and Estimating Ordered Parameters of Probability Distributions. Ph.D. Dissert. Univ. Amsterdam, Amsterdam, the Netherlands.

[23] Zarantonello, E.H. (1971). Projection on Convex Sets in Hilbert Space and Spectral Theory. New York: John Wiley.