Statistical Sciences Extension
Vol. 2, No. 1, Winter 2017, (P 15-30)

گسترۀ علوم آماری
سال دوم، شماره اول، پاییز و زمستان 1395، (ص 15-30)

انتخاب مدل غیرآشیانی در مدل‌های رگرسیونی با باقی‌ماندۀ سری‌های زمانی نامنفی

نویده یعقوبی هرزندی[1]، عبدالرضا سیاره[1*]

1. کارشناسی ارشد، گروه علوم کامپیوتر و آمار، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
2.دانشیار، گروه علوم کامپیوتر و آمار، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تاریخ دریافت: 1396/02/08 **تاریخ پذیرش**: 1396/03/08

Non-Nested Model Selection in Regression Models with Non-Negative Time Series Residual

N. Yaghoby Harzandy[*1], A. Sayyareh[2]

1.M.Sc Student, Computer Science and Statistics Department, K.N. Toosi University of Technology
2. Associate Professor, Computer Science and Statistics Department, K.N.Toosi University of Technology

Received: 2017/04/28 **Accepted:** 2017/05/29

چکیده

یکی از فرضیات معمول در مدل‌های رگرسیونی، نرمال و مستقل بودن مانده‌ها و آشیانی بودن مدل‌های تحت بررسی است. اما در عمل، با مدل‌های غیرآشیانی و خطاهای همبسته نامنفی نیز مواجه می‌شویم. در این مقاله، انتخاب مدل برای مدل‌های رگرسیونی غیرآشیانی با باقی‌ماندۀ خودبازگشتی نامنفی با توزیع‌های گاما، وایبل و لگ-نرمال به‌عنوان مدل‌های رقیب در نظر گرفته شده است. به‌دلایل فنی پارامترهای موجود در مدل‌ها با استفاده از روش برآوردیابی درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته برآورد می‌شوند. سپس با مطالعۀ شبیه‌سازی، مدل رگرسیونی بهینه با خطای سری‌های زمانی خودبازگشتی نامنفی به وسیله مقایسه معیارهای انتخاب مدل، تعیین می‌شود.

واژگان کلیدی

کولبک - لیبلر، ماکسیمم درست‌نمایی تعمیم‌یافته، مدل خودبازگشتی، مدل رگرسیونی، معیار انتخاب مدل.

Abstract

Normality hypothesis and independence of residuals are the usual assumptions for re- gression models. But in practice, sometimes we are faced with non-negative autocorrelated residuals case.
This paper discuss the problem of model selection for regression model with non-negative autoregressive residuals, Among the non-negative distributions, we consider, Gamma,Weibull, Log-normal distributions as rival models.We have derived the modified maximum likelihood estimators as efficient alternative for estimating model parameters. Finally, using simulation,we try to choose the optimal regression model with non-negative autoregressive residuals by comparing the ability of some model selection criteria.

Keywords

Autoregressive Model, Kullback-Leibler Information, Model Selection Criteria, Modified Maximum Likelihood, Regression Model.

نویسنده مسئول: عبدالرضا سیاره

*Correponding Author: asayyareh@Kntu.ac.ir

مقدمه

داده‌های جمع‌آوری‌شده از یک جامعه معمولاً از یک توزیع مجهول پیروی می‌کنند که به‌منظور انجام استنباط باید این توزیع مجهول برآورد یا تقریب زده شود. در روش‌های کلاسیک آماری یک چگالی احتمال پارامتری برای داده‌ها فرض می‌شود و به کمک روش‌های مختلف آزمون فرضیه پارامتر یا پارامترهای مناسب با در نظر گرفتن خطاها و توان آزمون انتخاب می‌شوند. اما در حقیقت انتخاب این مدل پارامتری یکی از مسائل مهم در آمار استنباطی است که در حیطه نظریه انتخاب مدل قرار می‌گیرد. این نظریه مبتنی بر خواص مجانبی برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم است.

انتخاب مدل یکی از موضوعات کلاسیک در آمار است که در آن مجموعه‌ای از مدل‌ها به منظور انتخاب مدل بهینه برای داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. از طرفی مطالعه ساختار درست پدیده‌ها توسط تعداد محدودی از داده‌ها مشکل است، لذا مدل‌های مختلفی به‌عنوان مدل‌های رقیب پیشنهاد شده و مدلی که دارای ساختاری نزدیک به ساختار داده‌ها باشد به‌عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود. به‌عنوان نقطه شروع در انتخاب مدل، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $Z_i = (X_i, Y_i)$ برای $i = 1,2,\ldots,n$، با تابع چگالی شرطی درست، $h_{Y|X}(y|x)$ و دو خانواده پارامتری رقیب:

$$F_\gamma = \left\{ f^{\gamma}(y\,|\,x), \quad \gamma \in \Gamma \subseteq R^q \right\}$$

$$G_\beta = \left\{ g^{\beta}(y\,|\,x), \quad \beta \in B \subseteq R^p \right\}$$

در نظر گرفته می‌شود. هدف اصلی در انتخاب مدل ارزیابی مدل‌های پارامتری رقیب است. مناسب بودن خانواده توزیع‌های G_β به معنای نزدیک بودن تابع چگالی $g^{\beta}(y\,|\,x)$ به توزیع درست $h_{Y|X}(y\,|\,x)$ است. برای تشخیص نزدیکی خانواده توزیع‌های پارامتری رقیب به توزیع درست از توابع زیان و مخاطره استفاده می‌شود. یکی از پرکاربردترین توابع مخاطره تابع مخاطره کولبک-لیبلر است که به صورت

$$\begin{aligned} KL\left\{h_{Y|X}(Y\,|\,X), g^{\beta}_{Y|X}(Y\,|\,X)\right\} &= E_h\left\{\log \frac{h_{Y|X}(Y\,|\,X)}{g^{\beta}_{Y|X}(Y\,|\,X)}\right\} \\ &= E_h\{\log(h_{Y|X}(Y\,|\,X))\} \\ &\quad - E_h\{\log(g^{\beta}_{Y|X}(Y\,|\,X))\} \end{aligned}$$

تعریف می‌شود [7]. معیار واگرایی کولبک - لیبلر یک مقدار نامنفی است و E_h امید ریاضی تحت توزیع توأم درست $Z_i = (X_i, Y_i)$ است. اگر

$$h_{Y|X}(Y\,|\,X) = g^{\beta}_{Y|X}(Y\,|\,X)$$

آنگاه

$$KL\left\{h_{Y|X}(Y\,|\,X), g^{\beta}_{Y|X}(Y\,|\,X)\right\} = 0$$

است. با توجه به تعریف مخاطره کولبک - لیبلر، نزدیک‌ترین عضو در مدل پارامتری G_β به توزیع درست $h_{Y|X}(.|.)$، $g^{\beta_*}(.|.)$ است که $\beta_* \in B$ مینیمم کنندۀ مخاطره $KL\left\{h_{Y|X}(Y|X), g^{\beta}_{Y|X}(Y|X)\right\}$، کولبک - لیبلر است. بنابراین $g^{\beta_*}(.|.)$ بهترین تقریب برای $h_{Y|X}(.|.)$ است.

در انتخاب مدل آماری بیان دو تعریف زیر الزامی است.

تعریف 1. اگر $\beta_0 \in B$ وجود داشته باشد به طوری که $g^{\beta_0}(.) = h(.)$ باشد، مدل $g^{\beta_0}(.)$ خوب‌توصیف شده، نامیده می‌شود در غیر این صورت مدل را بدتوصیف شده گویند.

تعریف 2. دو مدل F^{γ} و G^{β} نسبت به هم غیرآشیانی هستند اگر $F^{\gamma} \cap G^{\beta} = \emptyset$ در غیر این صورت دو مدل نسبت به هم آشیانی هستند.

باید به این نکته توجه شود که اگر مدل خوب‌توصیف شده باشد، $\beta_0 = \beta_*$ و اگر مدل بدتوصیف شده باشد $KL\left\{h, g^{\beta}\right\} \geq 0$ است. چون β_* مجهول است، باید برآورد شود. به خاطر این‌که داده‌ها از چگالی درست آمده‌اند،

با استفاده از برآوردگر شبه‌درست‌نمایی ماکسیمم[1] (QMLE)، یک برآوردگر سازگار برای β، محاسبه می‌شود [14].

معیار اطلاع آکائیک، AIC، برآوردی نااریب از مخاطره کولبک - لیبلر است. جملهٔ اول از تعریف مخاطرهٔ کولبک - لیبلر چون نیازی به دانستن آن نداریم در نظر گرفته نمی‌شود. مهم‌ترین بخش از مخاطره کولبک - لیبلر $E_h\left\{\log(g^{\beta}(.|.))\right\}$ است، که برآوردگری سازگار به صورت

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(g^{\hat{\beta}}(Y_i|X_i))$$

دارد، که می‌توان برآوردی از مخاطره تابع چگالی درست و مدل رقیب در نظر گرفت.

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(g^{\hat{\beta}}(Y_i|X_i))$ باعث ایجاد بیش‌برازش می‌شود، و لگاریتم تابع درست‌نمایی ماکسیمم به‌عنوان برآوردی از امید ریاضی لگاریتم تابع درست‌نمایی، اریبی مثبت را دارا می‌باشد.

و AIC به صورت

$$AIC=-2n\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log g^{\hat{\beta}}(Y_i|X_i)-\widehat{bias}\right\}=-2\sum_{i=1}^{n}\log g^{\hat{\beta}}(Y_i|X_i)+2p$$

تعریف می‌شود، که p تعداد پارامترهای نامعلوم در مدل است. اریبی لگاریتم - درست‌نمایی به وسیله تعداد پارامترهای آزاد تقریب زده می‌شود [1].

یکی از معیارهای پرکاربرد اطلاع که بر اساس توزیع پسین محاسبه می‌شود، معیار اطلاع بیزی به صورت

$$BIC=-2\sum_{i=1}^{n}\log g^{\hat{\beta}}(Y_i|X_i)+2p\log(n)$$

است [11]. در این نوع معیار اطلاع، فرض می‌شود که توزیع احتمال پیشین برای همهٔ مدل‌ها برابر است، و از این طریق یک تعریف مجانبی برای تابع درست‌نمایی مدل ساخته می‌شود.

یکی از فرضیات معمول در مدل‌های رگرسیونی، نرمال و مستقل بودن خطاها است. مدل رگرسیونی خطی به صورت

$$Y_i=X_i\beta+\varepsilon_i,\quad i=1,2,...,n$$

نشان داده می‌شود، که $\beta=(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_k)$ ضرایب رگرسیونی، $X=(1,X_1,X_2\dots,X_n)$ بردار $n+1$ بعدی از متغیرهای تثبیت‌شده هستند و مانده‌ها، ε_i، از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 پیروی می‌کنند. تحت این فرضیات معمول، برآوردگر حداقل مربعات[2] (OLS) برای پارامترهای مدل، یک برآوردگر نااریب با کم‌ترین واریانس است. انتخاب مدل در این حالت شامل انتخاب مجموعه‌ای از متغیرهای تثبیت‌شده است که با استفاده از معیار انتخاب مدل و آزمون فرضیه امکان‌پذیر است، و در این مورد همهٔ مدل‌های رقیب آشیانی هستند. کوار[3] و تیسا[4] (1998) روش‌های مختلفی را برای انتخاب یک مدل از یک مجموعهٔ بزرگی از مدل‌های آماری مورد بحث قرار می‌دهند، روش‌های انتخاب مدل مانند AIC، BIC، آمارهٔ C_p مالو[5]، ضریب تعیین R^2، ضریب تعیین تصحیح‌شده برای مدل‌های رگرسیونی تک‌متغیره و چندمتغیره، مدل‌های خودبازگشتی تک‌متغیره و چندمتغیره و مدل‌های رگرسیونی ناپارامتری ارائه می‌کند و با مطالعهٔ شبیه‌سازی عملکرد معیارهای انتخاب مدل را مورد بررسی قرار می‌دهد [9]. بدریک[6] و تیسا (1994) معیار آکائیک تصحیح‌شدهٔ AIC_c، را برای انتخاب مدل‌های رگرسیون چندمتغیره تعمیم می‌دهند. نشان می‌دهند که در نمونه‌های کوچک معیار آکائیک تصحیح‌شده، مدل بهتری را نسبت به معیارهای دیگر اطلاع، انتخاب می‌کند [3].

1. Quasi maximum likelihood
2. Ordinary least squares
3. Quarrie
4. Tsai
5. Mallows C_p-statitics
6. Bedrike

در تحلیل داده‌های اقتصادی، تجاری و زیست‌محیطی مدل‌های رگرسیونی با مانده‌های همبسته و نامنفی به وجود می‌آید. مسئلۀ مهمی که در این نوع از مدل‌های رگرسیونی مطرح می‌گردد برآورد پارامترها و انتخاب مدل است. روش‌های درست‌نمایی ماکسیمم و حداقل مربعات جواب صریحی برای برآورد پارامترهای مدل‌های رگرسیونی با خطاهای سری‌های زمانی نامنفی ندارند. بنابراین از روش‌های دیگری مانند درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته استفاده می‌شود. انتخاب مدل در این حالت شامل انتخاب مدل رگرسیونی، تعیین نوع و رتبه مدل‌های سری‌های زمانی و انتخاب مدل بهینه برای داده‌های رگرسیونی با مانده‌های سری‌های زمانی نامنفی با فضای متغیر تصادفی R^+ است. تیسای[1] (1984) مدل‌های رگرسیونی با خطای سری‌های زمانی خودبازگشتی - متحرک، ایستا و ناایستا را در نظر گرفته است که خطاها از توزیع نرمال پیروی می‌کند هم‌چنین برآورد کم‌ترین مربعات را برای پارامترهای موجود در مدل به دست آورده است [13]. دوربین[2] (1960) برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم را زمانی که فرضیات معمول مدل رگرسیونی مانند مستقل بودن خطاها، نقض می‌شود ارائه می‌دهد و در ادامه برآوردگرهای حداقل مربعات، Cohrance-orcutte و درست‌نمایی ماکسیمم را ارزیابی می‌کند [5]. هاروی[3] و فیلیپس[4] (1979) برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم را برای مدل‌های رگرسیونی با خطای سری‌های زمانی نرمال، محاسبه می‌کنند [6]. (پیرس[5]، 1971) برآوردگر حداقل مربعات را برای مدل رگرسیونی با خطای خودبازگشتی - متحرک به دست می‌آورد [10]. به منظور پیش‌بینی داده‌های آتی یک سری زمانی، نیازمند به تعیین یک مدل پیش‌بینی است یک انتخاب عمده مدل سری‌های زمانی خودبازگشتی است برای انتخاب رتبۀ مدل سری‌های زمانی از معیار اطلاع FIC، استفاده می‌شود [14].

در مدل‌های رگرسیونی با خطاهای همبسته، از روش درست‌نمایی مانده‌ها برای به دست آوردن یک شاخص اطلاع مانده RIC، استفاده می‌شود که با استفاده از این معیار می‌توان به‌صورت مشترک متغیرهای مدل رگرسیون و مرتبۀ مدل خودبازگشتی را انتخاب کرد [12].

مائو[6] (2013) شاخص اطلاع وزنی را برای مدل‌های رگرسیون با باقی‌ماندۀ همبسته و واریانس‌های نابرابر معرفی کرد و با استفاده از شبیه‌سازی به ارزیابی آن‌ها پرداخت [8]. (زمانی و سیاره، 2015) برآورد پارامترهای مدل خودبازگشتی با خطای نامنفی را به وسیلۀ روش‌های درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته و الگوریتم EM به دست آورده‌اند، و با استفاده از شاخص‌های اطلاع به انتخاب مدل بهینه پرداخته‌اند [15]، هم‌چنین مدل‌های خودبازگشتی با خطای نامنفی را در نظر گرفته و توزیع مجانبی برای آماره آزمون‌های ریشه واحد، وونگ و کاکس را به دست آورده‌اند و با استفاده از شاخص اطلاع آکائیک، آزمون وونگ، کاکس و فاصله ردیابی به انتخاب مدل بهینه پرداخته‌اند [16]

در این مقاله انتخاب مدل غیرآشیانی در مورد مانده‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. مدل رگرسیونی به صورت

$$\begin{cases} Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i = \varphi\, \varepsilon_{i-1} + a_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

در نظر گرفته می‌شود، که β_0 و β_1 ضرایب رگرسیونی، φ_1 ضریب مدل خودبازگشتی، a_i، مانده، متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که از توزیعی نامنفی پیروی می‌کند. توزیع گاما، وایبل، لگ - نرمال به‌عنوان سه مدل رقیب غیرآشیانی در نظر گرفته شده است. در بخش 2 پارامترهای موجود در مدل با استفاده از روش درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته برآورد می‌شود و در بخش 3 با استفاده از شبیه‌سازی، مدل رگرسیونی بهینه با باقی‌ماندۀ خودبازگشتی نامنفی توسط شاخص‌های اطلاع، AIC و BIC انتخاب می‌شود.

2 روش درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته

در روش درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته جملاتی از تابع لگاریتم درست‌نمایی که به صورت غیرخطی هستند، با استفاده از بسط تیلور مرتبه اول به صورت خطی درمی‌آیند.

---

1. Tsay
2. Durbin
3. Harvay
4. Phillips
5. Pierce
6. Mao

این روش در مدل‌های سری‌های زمانی غیر نرمال کاربرد زیادی دارد [2].

مدل رگرسیونی با باقی‌ماندۀ خود- بازگشتی گاما

مدل رگرسیونی

$$\begin{cases} Y_i = \beta_{01} + \beta_{11} X_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i = \varphi_1 \varepsilon_{i-1} + \alpha_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

که در آن β_0 و β_1 ضرایب رگرسیونی، φ_1 ضریب مدل خودبازگشتی، مانده، α_i، متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که از توزیع گاما پیروی می‌کند.

لگاریتم تابع درست‌نمایی، مانده‌های، $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} l(\beta_{01}, \beta_{11}, \varphi_1, \alpha, \beta) &= -n\log(\beta) - n\log(\Gamma(\alpha)) \\ &+ (\alpha - 1)\sum_{i=2}^{n} \log(z_i) - \sum_{i=2}^{n} z_i \end{aligned}$$

که در آن

$$z_i = \frac{(y_i - \varphi\ y_{i-1}) - \beta_{01}(1 - \varphi_1) + \beta_{11}(x_i - \varphi_1 x_{i-1})}{\beta}$$

است. مشتق لگاریتم تابع درست‌نمایی نسبت به β_{01}، β_{11} و φ_1 تابعی از z_i^{-1} است. با توجه به این‌که جواب صریحی برای برآوردها به دست نمی‌آید، برای به دست آوردن جواب صریح، α_iها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. بنابراین برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته را با محاسبۀ معادلات برآورد

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\beta_{01}, \beta_{11}, \varphi_1, \alpha, \beta) \\ &= -n \frac{\partial}{\partial \alpha} \log(\Gamma(\alpha)) + \sum_{i=2}^{n} \log(z_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta_{01}, \beta_{11}, \varphi_1, \alpha, \beta) \\ &= -\frac{n}{\beta} - (\alpha - 1)\frac{n}{\beta} \\ &+ \sum_{i=2}^{n} \frac{(y_i - \varphi\ y_{i-1}) - \beta_{01}(1 - \varphi_1) + \beta_{11}(x_i - \varphi_1 x_{i-1})}{\beta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \varphi_1} l(\beta_{01}, \beta_{11}, \varphi_1, \alpha, \beta) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \frac{y_{[i]-1} - \beta_{01} - \beta_{11} x_{[i]-1}}{\beta} \\ &- \frac{(\alpha - 1)}{\beta} \sum_{i=2}^{n} (y_{[i]-1} - \beta_{01} - \beta_{11} x_{[i]-1}) z_i^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \beta_{01}} l(\beta_{01}, \beta_{11}, \varphi_1, \alpha, \beta) \\ &= \frac{n(1 - \varphi_1)}{\beta} - \frac{(\alpha - 1)(1 - \varphi_1)\sum_{i=2}^{n} z_{[i]}^{-1}}{\beta} \end{aligned}$$

به دست می‌آوریم. $z_{[i]}$، مقادیر مرتب شده z_i و $(x_{[i]}, x_{[i]-1})$، $(y_{[i]}, y_{[i]-1})$، جفت مقادیر مرتب شده (x_i, x_{i-1}) (y_i, y_{i-1}) برحسب ترتیب $\alpha_{[i]}$ است. اگر $E\{z_{[i]}\}$ را با $t_{[i]}$ نشان دهیم در این صورت

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{[i]}} \exp(-z) z^{k-1}\, dz = \frac{i}{n+1}$$

محاسبه می‌شود. با استفاده از دو رابطه بسط‌های تیلور

$$\begin{aligned} z_{[i]}^{-1} &= \frac{2}{t_{[i]}} - \frac{z_{[i]}}{t_{[i]}^2} + o(|z_{[i]} - t_{[i]}|) \\ z_{[i]}^{-1} &= \alpha_i + \beta_i z_{[i]} \end{aligned}$$

برای $\alpha_i = \frac{2}{t_{[i]}}$ و $\beta_i = \frac{1}{t_{[i]}^2}$، برآورد درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته پارامترها به صورت

$$\hat{\Gamma}_D = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \log(z_{[i]})$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{1}{n\hat{\alpha}} \sum_{i=2}^{n} ((y_{[i]} - \hat{\varphi}\ y_{[i]-1}) + \hat{\beta}_{11}(x_{[i]} - \hat{\varphi}_1 x_{[i]-1}) \\ &- \hat{\beta}_{01}(1 - \hat{\varphi}_1)) \end{aligned}$$

$$\hat{\varphi}_1=\frac{\hat{\beta}\sum_{i=2}^{n}(\hat{\lambda}_{[i1]}-(\hat{\alpha}-1)\hat{\lambda}_{[i1]}a_i)}{(\hat{\alpha}-1)(\hat{\beta}_{01}\sum_{i=2}^{n}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i-\sum_{i=2}^{n}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i y_{[i]-1}+\hat{\beta}_{11}\sum_{i=2}^{n}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i x_{[i]-1})}-\frac{(\hat{\alpha}-1)\sum_{i=2}^{n}(\hat{\lambda}_{[i1]}B_i y_{[i]}+\hat{\beta}_{01}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i+\hat{\beta}_{11}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i x_{[i]})}{(\hat{\alpha}-1)(\hat{\beta}_{01}\sum_{i=2}^{n}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i-\sum_{i=2}^{n}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i y_{[i]-1}+\hat{\beta}_{11}\sum_{i=2}^{n}\hat{\lambda}_{[i1]}B_i x_{[i]-1})}$$

$$\hat{\beta}_{01}=\frac{\hat{\beta}((\hat{\alpha}-1)\sum_{i=2}^{n}a_i-n)+(\hat{\alpha}-1)\sum_{i=2}^{n}(B_i\hat{\sigma}_{[i1]}-\hat{\beta}_{11}B_i\hat{\upsilon}_{[i1]})}{(\hat{\alpha}-1)(1-\hat{\varphi})\sum_{i=2}^{n}B_i\hat{\upsilon}_{[i1]}}$$

$$\hat{\beta}_{11}=\frac{\hat{\beta}(\hat{\alpha}-1)\sum_{i=2}^{n}\hat{\upsilon}_{[i1]}a_i+\sum_{i=2}^{n}\hat{\upsilon}_{[i1]}(B_i\hat{\sigma}_{[i1]}-(1-\hat{\varphi}_1)\hat{\beta}_{01}B_i-1)}{(\hat{\alpha}-1)\sum_{i=2}^{n}B_i\hat{\upsilon}_{[i1]}}$$

محاسبه می‌شود، که در آن

$$\hat{\upsilon}_{[i1]}=(x_{[i]}-\hat{\varphi}x_{[i]-1})$$
$$\hat{\sigma}_{[i1]}=(y_{[i]}-\varphi\ y_{[i]-1})$$
$$\hat{\lambda}_{[i1]}=(y_{[i]-1}-\hat{\beta}_{11}x_{[i]-1}-\hat{\beta}_{01})$$

است.

مدل رگرسیونی با باقی‌ماندهٔ خودبازگشتی وایبل

مدل رگرسیونی با خطای خودبازگشتی را به صورت

$$\begin{aligned}Y_i&=\beta_{02}+\beta_{12}X_i+\varepsilon_i\\ \varepsilon_i&=\varphi_2\varepsilon_{i-1}+a_i\end{aligned}\quad،\ i=1,2,\ldots,n$$

در نظر می‌گیریم.که در آن a_iها، جملات مانده و از یکدیگر مستقل و دارای توزیع وایبل

$$f(a_i)=\frac{\gamma-1}{\tau}a_i^{(\gamma-1)}\exp(-(\frac{a_i}{\tau})^{\gamma})$$

و β_{02} و β_{12} ضرایب رگرسیونی، φ_2ضریب مدل خودبازگشتی هستند.

لگاریتم تابع درست‌نمایی، $a_1,a_2,\ldots,a_n$

$$l(\beta_{02},\beta_{12},\varphi_2,\alpha,\beta)=n\log(\gamma)-n\log(\tau)+\gamma\sum_{i=2}^{n}\log(z_i)-\sum_{i=2}^{n}z_i^{\gamma}$$

که

$$z_i=\frac{(y_i-\varphi_2y_{i-1})-\beta_{02}(1-\varphi_2)+\beta_{12}(x_i-\varphi_2x_{i-1})}{\tau}$$

و معادلات درست‌نمایی به صورت

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}l(\beta_{01},\beta_{11},\varphi_1,\alpha,\beta)=\frac{n}{\gamma}+\sum_{i=2}^{n}\log(z_{[i]})-\sum_{i=2}^{n}z_{[i]}^{\gamma}\log(z_{[i]})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}l(\beta_{01},\beta_{11},\varphi_1,\alpha,\beta)=-\frac{n}{\tau}-\frac{(\gamma-1)}{\tau}\sum_{i=2}^{n}z_{[i]}z_{[i]}^{-1}+\frac{\gamma}{\tau}\sum_{i=2}^{n}z_{[i]}z_{[i]}^{\gamma-1}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_2}(\beta_{02},\beta_{12},\varphi_2,\gamma,\tau)=\frac{\gamma\sum_{i=2}^{n}(y_{[i]-1}-\beta_{12}x_{[i]-1}-\beta_{02})z_{[i]}^{\gamma-1}}{\tau}-\frac{(\gamma-1)\sum_{i=2}^{n}(y_{[i]-1}-\beta_{12}x_{[i]-1}-\beta_{02})z_{[i]}^{-1}}{\tau}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{12}}(\beta_{02},\beta_{12},\varphi_2,\gamma,\tau)=\frac{\gamma\sum_{i=2}^{n}(x_{[i]}-\varphi_2x_{[i]-1})z_{[i]}^{\gamma-1}}{\tau}-\frac{(\gamma-1)\sum_{i=2}^{n}(x_{[i]}-\varphi_2x_{[i]-1})z_{[i]}^{-1}}{\tau}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{02}}(\beta_{02},\beta_{12},\varphi_2,\gamma,\tau)=-\frac{(\gamma-1)(1-\varphi_2)\sum_{i=2}^{n}z_{[i]}^{-1}}{\tau}+\frac{\gamma(1-\varphi_2)\sum_{i=2}^{n}z_{[i]}^{\gamma-1}}{\tau}=0$$

هستند. $z_{[i]}^{-1}$ و $z_{[i]}^{\gamma-1}$ موجود در معادلات فوق با استفاده از بسط تیلور

$$Z_{[i]}^{-1} \simeq V_{i0} - B_{i0} Z_{[i]}$$

$$Z_{[i]}^{\gamma-1} \simeq V_{i0}^{*} - B_{i0}^{*} Z_{[i]}$$

به یک رابطه خطی تبدیل می‌شوند. که در آن

$$B_{i0} = \frac{1}{t_{[i]}^{2}} \quad v_{i0} = \frac{2}{t_{[i]}}$$

$$v_{i0}^{*} = (2-\gamma)\, t_{[i]}^{\gamma-1}$$

$$B_{i0}^{*} = (\gamma-1)\, t_{[i]}^{(\gamma-2)}$$

و $t_{[i]} = \left(-\log\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ است. لذا

$$\hat{\beta}_{02} = \frac{\sum_{i=2}^{n} B_i(\hat{s}_{[i2]} - \hat{\beta}_{12}\hat{u}_{[i2]}) - \hat{\tau}\sum_{i=2}^{n} v_i}{(1-\hat{\varphi}_2)\sum_{i=2}^{n} B_i}$$

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum_{i=2}^{n} B_i \hat{u}_{[i2]}\hat{s}_{[i2]} - (1-\hat{\varphi}_2)\hat{\beta}_{02}\sum_{i=2}^{n} B_i \hat{u}_{[i2]}}{\sum_{i=2}^{n} B_i \hat{u}_{[i2]}^{2}} - \frac{\hat{\tau}\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{[i2]} v_i}{\sum_{i=2}^{n} B_i \hat{u}_{[i2]}^{2}}$$

$$\hat{\varphi}_2 = \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{l}_{[i2]} B_i (y_{[i]} - \hat{\beta}_{12} x_{[i]} - \hat{\beta}_{02}) - \hat{\tau}\sum_{i=2}^{n} \hat{l}_{[i2]} v_i}{\sum_{i=2}^{n} \hat{l}_{[i2]}^{2} B_i}$$

$$v_i = (\gamma-1)v_{i0} - \gamma v_{i0}^{*}$$

$$B_i = (\gamma-1)B_{i0} + \gamma B_{i0}^{*}$$

است.

مدل رگرسیونی با باقی‌ماندهٔ خودبازگشتی لگ - نرمال

مدل رگرسیونی

$$Y_i = \beta_{03} + \beta_{13} X_i + \varepsilon_i$$
$$\varepsilon_i = \varphi_3 \varepsilon_{i-1} + a_i$$

$i = 1, 2, \ldots, n$، در نظر گرفته می‌شود. که β_{03} و β_{13} ضرایب رگرسیونی، φ_3 ضریب مدل خودبازگشتی، a_i ، مانده‌ها، متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که از توزیع لگ - نرمال پیروی می‌کند. تابع لگاریتم درست‌نمایی، $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$l(\beta_{03}, \beta_{13}, \varphi_3, \mu, \sigma) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=2}^{n}\log(z_i) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(\log(z_i) - \mu)^2$$

است. برآورد درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته به وسیله معادلات درست‌نمایی

$$\frac{\partial}{\partial\mu} l(\beta_{03}, \beta_{13}, \varphi_3, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(\log(z_{[i]}) - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} l(\beta_{03}, \beta_{13}, \varphi_3, \mu, \sigma) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=2}^{n}(\log(z_{[i]}) - \mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{03}} l(\beta_{03}, \beta_{13}, \varphi_3, \mu, \sigma) = \frac{(1-\varphi_3)}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n} z_{[i]}^{-1}(\log(z_{[i]}) - \mu) + (1-\varphi_3)\sum_{i=2}^{n} z_{[i]}^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{13}} l(\beta_{03}, \beta_{13}, \varphi_3, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n} z_{[i]}^{-1}u_{[i3]}(\log(z_{[i]}) - \mu) + \sum_{i=2}^{n} z_{[i]}^{-1}u_{[i3]} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_3} l(\beta_{03}, \beta_{13}, \varphi_3, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n} l_{[i3]} z_{[i]}^{-1}(\log(z_{[i]}) - \mu) + \sum_{i=2}^{n} l_{[i3]} z_{[i]}^{-1} x_{[i]-1} = 0$$

با استفاده از دو رابطه بسط تیلور

$$Z_{[i]}^{-1} \simeq \alpha_i - B_i Z_i$$

$$\log(Z_{[i]}) = c_i + \frac{\alpha_i}{2} Z_i$$

که $\alpha_i = \frac{2}{t_{[i]}}$، $B_i = \frac{1}{t_{[i]}^2}$، $c_i = \log(t_{[i]}) - 1$ و $t_{[i]}$ به صورت

$$\int_0^{t_{[i]}} \frac{1}{z\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(z)-\mu)^2\right) = \frac{i}{n+1}$$

به دست می‌آید، برآورد پارامترها به صورت

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \log(z_{[i]})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} (\log(z_{[i]}) - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\beta}_{03} = \frac{(-B+\sqrt{D})}{2A}$$

$$D = B^2 - 4AC$$

$$A = -\frac{(1-\hat{\varphi}_3)^3}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n} B_i \alpha_i$$

$$B = \sum_{i=2}^{n} B_i (1-\hat{\varphi}_3)^2 - \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n}(B_i c_i - B_i \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} + \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n} B_i \alpha_i (y_{[i]} - \hat{s}_{i3} - B_i \alpha_i \hat{\beta}_{13}\hat{u}_{i3})}{\hat{\sigma}^2}$$

$$C = (1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i - B_i \hat{s}_{[i3]} + B_i \hat{\beta}_{13}\hat{u}_{[i3]}) - \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i^2 \hat{s}_{[i3]} - \alpha_i^2 \hat{\beta}_{13}\hat{u}_{[i3]})}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}(B_i \alpha_i \hat{s}_{[i3]}^2 + B_i \alpha_i \hat{\beta}_{13}^2)\hat{u}_{[i3]}}{2\hat{\sigma}^2} - \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i c_i - \alpha_i \hat{\mu} - B_i c_i \hat{s}_{[i3]}}{\hat{\sigma}^2} + \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n} B_i c_i \hat{\beta}_{13}\hat{u}_{[i3]})}{\hat{\sigma}^2} + \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n}(B_i \hat{\mu}\hat{s}_{[i3]} - B_i \hat{\mu}\hat{\beta}_{13}\hat{u}_{[i3]})}{\hat{\sigma}^2} - \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\sum_{i=2}^{n} B_i \alpha_i \hat{\beta}_{13}\hat{u}_{[i3]}\hat{s}_{[i3]}}{\hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{\beta}_{13} = \frac{(-B' + \sqrt{D})}{2A'}$$

$$D = B'^2 - 4A'C'$$

$$A' = -\frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{[i3]}^3 B_i \alpha_i}{2\hat{\sigma}^2}$$

$$B' = \sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{[i3]}^2 B_i - \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{[i3]}^2 \alpha_i^2}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{[i3]}^2 B_i (c_i - \hat{\mu} + \alpha_i \hat{s}_{[i3]})}{\hat{\sigma}^2} - \frac{(1-\hat{\varphi}_3)\hat{\beta}_{03}\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{[i3]}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

$$C' = \sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{[i3]}(\alpha_i - B_i\hat{s}_{[i3]} + B_i(1-\hat{\varphi}_3)\hat{\beta}_{03}) + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{[i3]}\alpha_i(\hat{s}_{[i3]}\alpha_i - \alpha_i(1-\hat{\varphi}_3)\hat{\beta}_{03} - B_i(1-\hat{\varphi}_3)^2)}{2\hat{\sigma}^2}$$
$$+\frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{[i3]}\alpha_i(c_i-\hat{\mu}) - \sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{[i3]}B_i(\hat{\mu}(1-\hat{\varphi}_3)\hat{\beta}_{03})}{\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{[i3]}B_i(\hat{\mu}\hat{s}_{[i3]} + \alpha_i\hat{s}_{[i3]}(1-\hat{\varphi}_3)\hat{\beta}_{03})}{\hat{\sigma}^2} - \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{[i3]}B_i(c_i\hat{s}_{[i3]} - c_i(1-\hat{\varphi}_3)\hat{\beta}_{03}}{\hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{\varphi}_3 = \frac{(-B'' + \sqrt{D})}{2A''}$$
$$D = B''^2 - 4A''C''$$

$$A'' = -\frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}B_i\alpha_i(x^2_{[i]-1}\hat{\beta}_{13}^2 - y^2_{[i]-1})}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}B_i\alpha_i(y_{[i]-1}x_{[i]-1}\hat{\beta}_{13} - x_{[i]-1}\hat{\beta}_{03}\hat{\beta}_{13} + y_{[i]-1}\hat{\beta}_{03})}{\hat{\sigma}^2}$$

$$B'' = \sum_{i=2}^{n}\hat{l}^2_{[i3]}B_i - \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}^2_{[i3]}\alpha_i^2}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}^2_{[i3]}B_ic_i - \sum_{i=2}^{n}\hat{l}^2_{[i3]}B_i\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}B_i\alpha_i(y_{[i]-1}y_{[i]} + \hat{\beta}_{13}x_{[i]}x_{[i]-1})}{\hat{\sigma}^2}$$
$$+\frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}^2_{[i3]}B_i\alpha_i(\hat{\beta}_{03} + x_{[i]-1}\hat{\beta}_{03}\hat{\beta}_{13} + x_{[i]}\hat{\beta}_{03}\hat{\beta}_{13})}{\hat{\sigma}^2}$$

$$C'' = \sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}(\alpha_i - B_iy_{[i]} + B_i\hat{\beta}_{13}x_{[i]}) + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}\alpha_i(y_{[i]} - \hat{\beta}_{13}x_{[i]} - \hat{\beta}_{03})}{2\hat{\sigma}^2} - \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}B_i\alpha_i(y^2_{[i]} - \hat{\beta}^2_{03} - \hat{\beta}^2_{13}x^2_{[i]})}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}\alpha_i(c_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2}$$
$$+\frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}B_ic_i(\hat{\beta}_{13}x_{[i]} + \hat{\beta}_{03} - y_{[i]})}{\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}B_i\hat{\mu}(y_{[i]} - x_{[i]} - \hat{\beta}_{03})}{\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{l}_{[i3]}B_i\alpha_i(y_{[i]}\hat{\beta}_{03} + \hat{\beta}_{13}x_{[i]}y_{[i]} - x_{[i]}\hat{\beta}_{03}\hat{\beta}_{13})}{\hat{\sigma}^2}$$

و

$$\hat{s}_{[i3]} = (y_{[i]} - \hat{\varphi}_3 y_{[i]-1})$$
$$\hat{u}_{[i3]} = (x_{[i]} - \hat{\varphi}_3 x_{[i-1]})$$
$$\hat{l}_{[i3]} = (y_{[i]-1} - \hat{\beta}_{03} - \hat{\beta}_{13}x_{[i]-1})$$

است.

3 شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی نتایج به دست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل رگرسیونی

$$Y_i = 2 + 0.8X_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\varepsilon_i = 0.7\varepsilon_{i-1} + a_i$$

جدول 1. برآورد درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته

مدل درست	n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{j}_1$	$\hat{b}_{01}$	$\hat{b}_{11}$
$Y_i = 2 + 0.8X_i + e$	100	2.7473	1.9020	0.7440	2.3739	0.7989
$\varepsilon_i = 0.7\varepsilon_{i-1} + a_i$	200	2.9133	1.9691	0.7332	2.0541	0.7997
$a_i \sim G(3,2)$	300	2.9754	1.9958	0.7310	2.0406	0.7999
مدل درست	n	$\hat{\gamma}$	$\hat{\tau}$	$\hat{j}_1$	$\hat{b}_{02}$	$\hat{b}_{12}$
$Y_i = 2 + 0.8X_i + e$	50	2.0188	1.9713	0.7485	2.1145	0.7991
$\varepsilon_i = 0.7\varepsilon_{i-1} + a_i$	100	2.0233	1.9946	0.7406	2.0844	0.7998
$a_i \sim W(2,2)$	200	2.0135	2.0011	0.7327	2.0653	0.8001
	300	2.0085	1.9992	0.7283	2.0558	0.80004
مدل درست	n	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{j}_3$	$\hat{b}_{03}$	$\hat{b}_{13}$
$Y_i = 2 + 0.8X_i + e$	50	0.9834	1.9511	0.7027	2.0898	0.8024
$\varepsilon_i = 0.7\varepsilon_{i-1} + a_i$	100	0.9914	1.977	0.7011	2.0597	0.80008
$a_i \sim LN(1,2)$	200	0.99	1.9903	0.7004	2.033	0.7996
	300	0.9956	1.9919	0.7003	2.0219	0.7992

به طوری که a_i، از توزیع‌های گاما، وایبل یا لگ - نرمال و X_i از توزیع نرمال استاندارد پیروی می‌کنند. برآورد درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته پارامترهای نامعلوم برای هریک از مقادیر متفاوت n محاسبه و نتایج در جدول شماره 1 ارائه شده است. مطابق نتایج به دست آمده در جدول شماره 1، با افزایش n مقادیر برآورد شدهٔ پارامترها به مقادیر در نظر گرفته شده، همگرا هستند. با استفاده از شاخص‌های اطلاع مانند، AIC و BIC مدل رگرسیونی بهینه با باقی‌ماندهٔ همبسته نامنفی انتخاب می‌شود.

مجموعه‌ای از داده‌ها از توزیع وایبل، $W(2,2)$، تولید می‌شود، مدل‌های رگرسیونی با باقی‌ماندهٔ همبسته گاما، وایبل، لگ - نرمال و وایبل $W(7,3)$، به‌عنوان چهار مدل رقیب در نظر گرفته می‌شود، که به ترتیب به صورت f_1^h ، f_2^y ، f_3^q و f_4^y نشان داده می‌شود.

با استفاده از برآوردهای به دست آمده در بخش 2 و داده‌های قابل دسترس، پارامترهای موجود در چهار مدل رقیب برآورد و AIC ، BIC، برای jهای مختلف محاسبه شده‌اند. که نتایج در جدول شماره 2 آمده است.

مقادیر معیارهای اطلاع با افزایش حجم نمونه افزایش می‌یابد. مدلی به‌عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود که کم‌ترین مقدار معیار اطلاع را داشته باشد.

با توجه به نتایج نشان داده شده در جدول 2، به ازای j بزرگ‌تر از 0.8 و nهای مختلف

$$n = 100$$

$$IC(f_2^y)\ \mathbf{p}\ IC(f_1^h)\ \mathbf{p}\ IC(f_3^q)\ \mathbf{p}\ IC(f_4^y)$$

و به ازای j کوچک‌تر از 0.7 و $n = 250, 500$

$$IC(f_2^h)\ \mathbf{p}\ IC(f_1^y)\ \mathbf{p}\ IC(f_3^q)\ \mathbf{p}\ IC(f_4^y)$$

$$IC(f_1^h)\ \mathbf{p}\ IC(f_2^y)\ \mathbf{p}\ IC(f_3^q)\ \mathbf{p}\ IC(f_4^y)$$

جدول 2. مقادیر معیارهای اطلاع

	n	AIC				BIC			
		f_1^{η}	f_2^{ψ}	f_3^{θ}	f_4^{ψ}	f_1^{η}	f_2^{ψ}	f_3^{θ}	f_4^{ψ}
	100	278.675	264.398	293.274	845.446	291.701	277.964	306.299	858.47
φ=0.9	250	956.664	474.650	935.736	2055.39	682.563	668.082	754.545	2072.74
	500	82.1314	1294.44	05.1467	4068.68	1335.82	1315.52	1488.13	4089.76
	100	013.267	938.264	274.293	18.889	280.039	964.277	299.306	21.902
φ=0.8	250	593.662	905.649	165.735	75.2049	680.2	667.513	752.772	35.2067
	500	1314.87	1294.37	08.1467	16.4067	94.1335	1315.45	1488.15	4088.23
	100	264.199	275.329	293.05	1135.23	277.225	288.355	306.075	1148.25
φ=0.7	250	657.904	653.241	736.299	2143.52	675.511	670.848	735.907	2161.13
	500	1313.29	1294.52	1463.55	4082.89	1334.37	1315.59	1484.62	4103.96
	100	274.07	281.5	281.5008	1211.83	287.096	294.301	309.151	1224.86
φ=0.6	250	680.362	666.384	738.391	2488.19	697.969	666.387	755.998	2679.35
	500	1338.16	1298.56	1460.718	4231.78	1359.23	1319.63	1483.14	4252.94
	100	278.49	281.275	293.575	1185.71	291.516	294.301	306.601	1198.73
φ=0.5	250	702.05	676.384	736.16	2661.74	716.657	693.992	735.767	2679.35
	500	1394.49	1311.055	1468.5	4579.34	1415.57	1332.12	1481.573	4600.42
	100	277.262	279.57	294.883	1163.05	290.288	292.596	307.909	1176.07
φ=0.4	250	704.914	677.129	738.464	2700.75	722.521	694.737	756.071	2718.36
	500	1408.836	1323.24	1462.07	4866.01	1429.9	1344.32	1483.14	4887.08
	100	277.34	279.276	292.93	1157.4	290.06	292.302	305.956	1170.43
φ=0.3	250	700.948	676.676	736.853	2672.59	718.555	694.284	756.071	2718.36
	500	1411.41	1328.99	1461.82	4980.74	1432.48	1350.06	1482.9	5001.95
	100	279. 23	277.591	290 .30	1138.66	292.261	290.617	303.328	1161.678
φ=0.2	250	700.121	673.703	728.657	2635.96	717.728	692.311	717.728	2663.57
	500	1404.25	1327.77	1351.56	3971.39	1425.32	1338.83	1372.63	4992.56
	100	276.202	277.766	289.923	1155.92	289.22	290.792	302.939	1168.94
φ=0.1	250	694.816	670.033	727.395	2633.67	712.323	690.631	735.002	2631.27
	500	1399.69	1330.37	1353.89	4984.15	1420.76	1351.44	1474.97	5005.22

جدول 3. p- مقدار آزمون کولموگروف - اسمیرنوف

	n	f_1^h	f_2^y	f_2^q	f_4^y
	100	0.3992	0.6733	0.0329	0.0000
φ=0.9	250	0.3802	0.7774	0.0009	0.0000
	500	0.242	0.792	0.0000	0.0000
	100	0.4133	0.7895	0.037	0.0000
φ=0.8	250	0.3585	0.7975	0.0008	0.0000
	500	0.2499	0.7985	0.0000	0.0000
	100	0.4148	0.792	0.0332	0.0000
φ=0.7	250	0.3494	0.7908	0.0008	0.0000
	500	0.2377	0.8043	0.0000	0.0000
	100	0.4148	0.792	0.0332	0.0000
φ=0.6	250	0.3494	0.7908	0.0008	0.0000
	500	0.2377	0.8043	0.0000	0.0000
	100	0.3892	0.7924	0.02	0.0000
φ=0.5	250	0.3704	0.7938	0.0009	0.0000
	500	0.2481	0.8036	0.0000	0.0000
	100	0.4144	0.7991	0.3225	0.0000
φ=0.4	250	0.3668	0.798	0.001	0.0000
	500	0.2438	0.7918	0.0000	0.0000
	100	0.4144	0.7932	0.0322	0.0000
φ=0.3	250	0.3791	0.80001	0.0008	0.0000
	500	0.2435	0.7926	0.0000	0.0000
	100	0.4244	0.8056	0.0323	0.0000
φ=0.2	250	0.3709	0.7914	0.0007	0.0000
	500	0.2458	0.791	0.0000	0.0000
	100	0.3995	0.8001	0.0349	0.0000
φ=0.1	250	0.3645	0.796	0.0011	0.0000
	500	0.2397	0.792	0.0000	0.0000

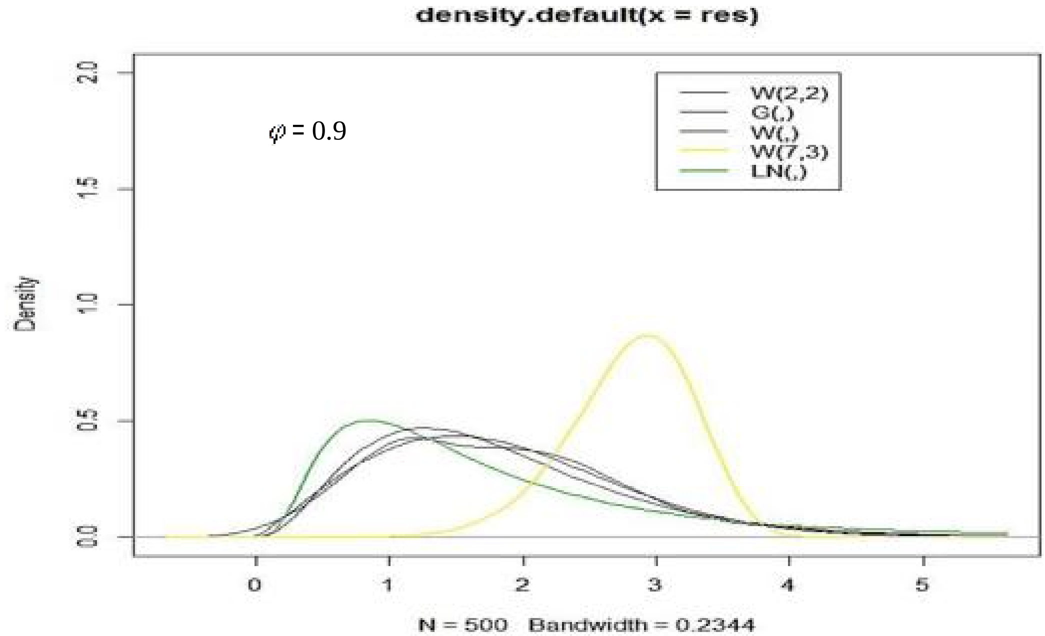
برای توضیح بیشتر در مورد مقادیر به دست آمده در جدول شماره 2، مقادیر AIC مدل رقیب وایبل به ازای j $= 0.9$ و nهای مختلف دارای کم‌ترین مقدار است، بنابراین مدل رگرسیون با باقی‌ماندهٔ همبسته وایبل به‌عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود و به ازای j $= 0.7$ و $n = 250, 500$، AIC مدل رقیب وایبل کم‌ترین مقدار را دارد، اما برای $n = 100$ مدل رقیب گاما کم‌ترین مقدار را دارد .

آزمون کولموگروف - اسمیرنوف

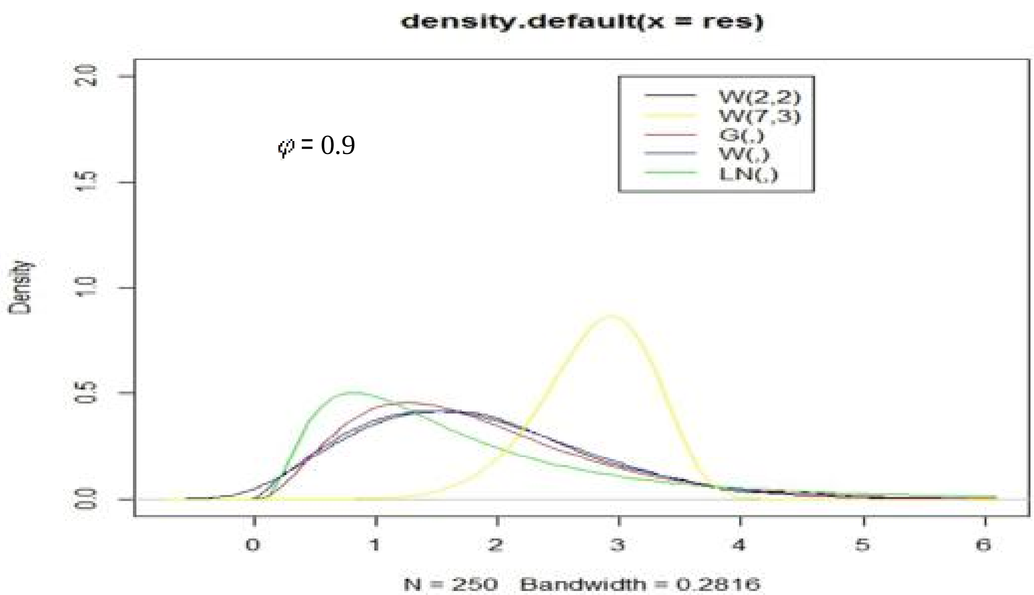
آزمون کولموگروف - اسمیرنوف نتایج به دست آمده را تصدیق می‌کند. مقادیر آزمون کولموگروف - اسمیرنوف برای n و j های مختلف در جدول 3 نمایش داده می‌شود. طبق نتایج به دست آمده، p-مقدار برای مدل رگرسیونی با باقی‌ماندهٔ همبسته وایبل برای n و j های مختلف بزرگ‌تر از 0.05 است؛ بنابراین به‌عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود طبق نتایج به دست آمده در جدول شماره 3، p- مقدار برای مدل‌های رقیب وایبل، گاما به ازای j و nهای مختلف بزرگ‌تر از 0.05 است، و برای لگ - نرمال و وایبل $W(7, 3)$، کوچک‌تر از 0.05 است

اشکال 1-6 منحنی مدل‌های رقیب وایبل، گاما و لگ - نرمال را برای $\varphi = 0.7, 0.9$ و nهای مختلف نشان می‌دهد. با مشاهده اشکال به درستی نتایج به دست آمده در جدول شماره 2 پی می‌بریم، مطابق نتایج به دست آمده از جدول شماره 2 مقادیر AIC و BIC برای مدل رگرسیونی با باقی‌ماندهٔ همبسته وایبل به ازای $\varphi = 0.9$ و nهای مختلف کم‌ترین مقدار را دارد بنابراین این مدل به‌عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود طبق اشکال 1-3 مدل رگرسیونی با مانده همبسته وایبل به مدل مولد داده $W(2, 2)$، نزدیک‌تر است بنابراین نتایج حاصل از شبیه‌سازی توسط این شکل‌ها تعیین می‌شود.

برای j های دیگر به همین منوال است.



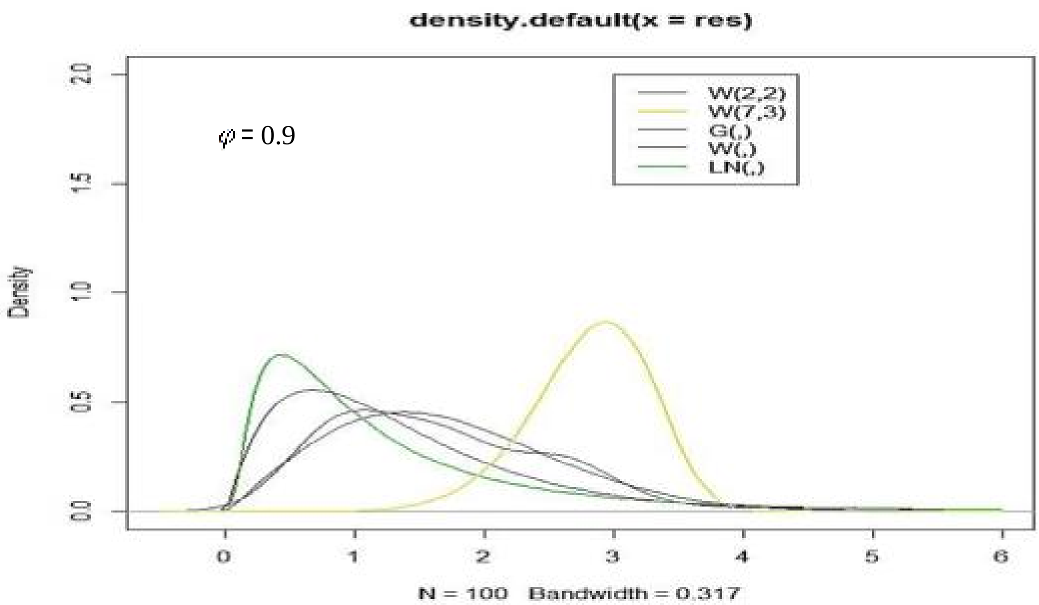
شکل 1. منحنی مدل وایبل، گاما، لگ - نرمال برای500 =n



شکل 2. منحنی مدل وایبل، گاما، لگ - نرمال برای 250 =n

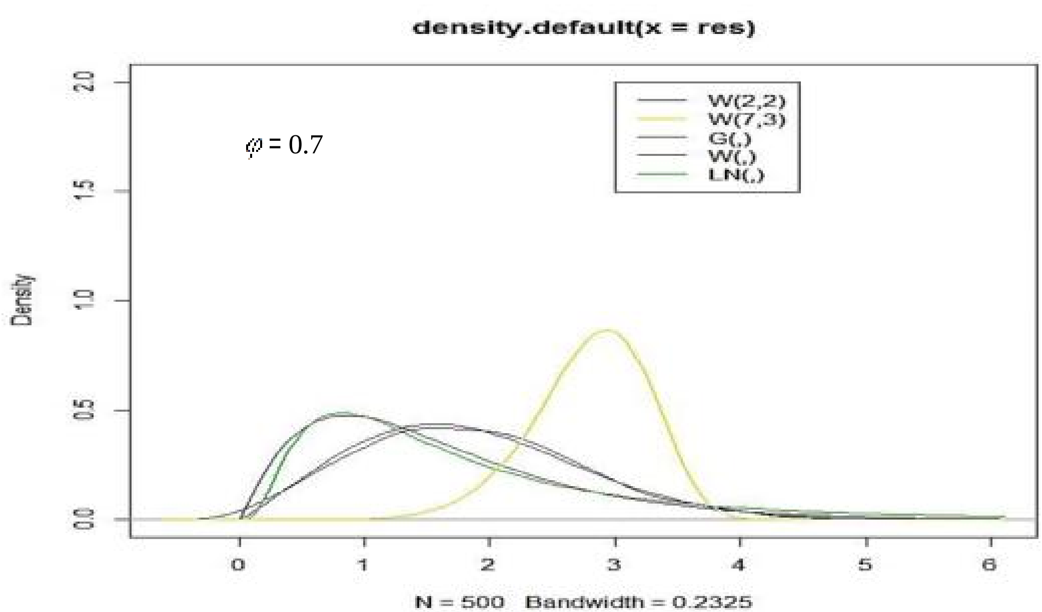
بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل رگرسیونی بهینه با باقی‌ماندهٔ خودبازگشتی نامنفی با استفاده از معیارهای اطلاع، انتخاب شده است.



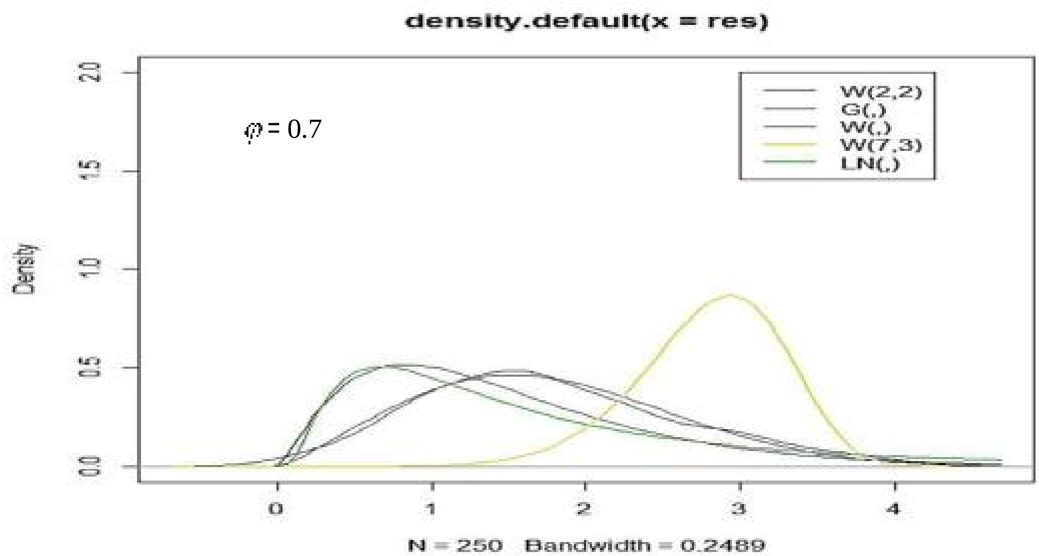
شکل 3. منحنی مدل وایبل، گاما، لگ - نرمال برای n=100

در ابتدا برآورد پارامترهای موجود در مدل با استفاده از روش درست‌نمایی ماکسیمم تعمیم‌یافته، محاسبه شده است. با مطالعهٔ نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی، زمانی که داده‌ها

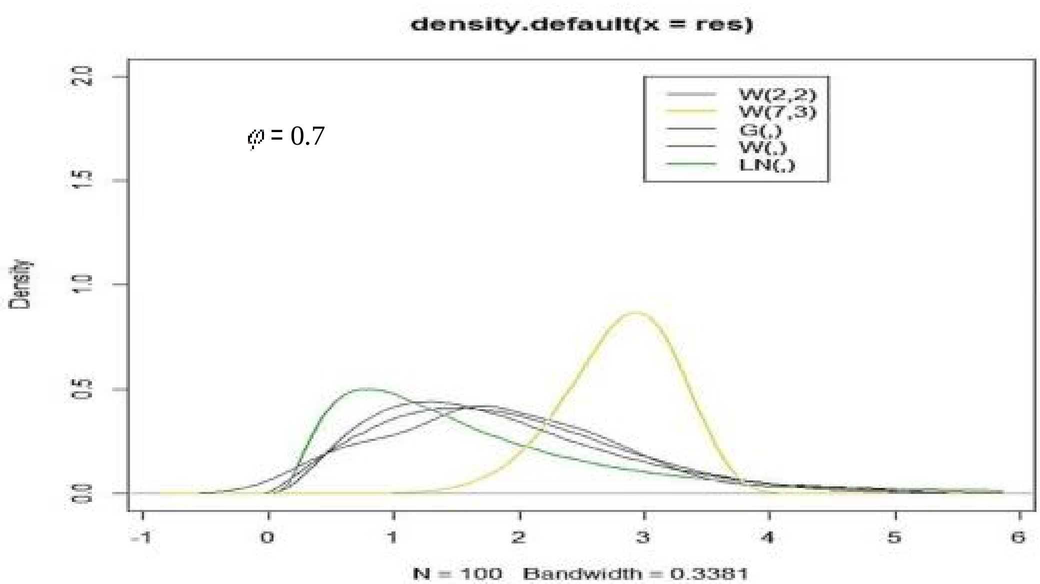


شکل 4. منحنی مدل وایبل، گاما و لگ-نرمال برای n=500

از توزیع وایبل $W(2,2)$، تولید می‌شود مقادیر AIC و BIC برای مدل رگرسیونی رقیب با باقی‌ماندۀ خودبازگشتی به این معنی است که مدل رگرسیونی رقیب با باقی‌ماندۀ خودبازگشتی وایبل به‌عنوان مدل بهینه انتخاب



شکل 5. منحنی مدل وایبل، گاما ولگ-نرمال برای n= 250



شکل 6. منحنی مدل وایبل، گاما و لگ - نرمال برای n= 100

وایبل به ازای φهای بزرگتر از 0.8 دارای کم‌ترین مقدار است. می‌شود. درستی این نتایج با استفاده از آزمون کولموگروف - اسمیرنوف و شکل‌های رسم شده نشان داده شده است.

یکی از پیچیدگی‌هایی که در انتخاب مدل غیرآشیانی وجود دارد، انتخاب مجموعه مدل‌های رقیب و یافتن برآوردکننده درست‌نمایی ماکسیمم در معادلات درست‌نمایی است که شکل صریح و بسته‌ای ندارند.

همچنین مطالعهٔ سایر مدل‌های رگرسیونی با باقیمانده‌های همبستهٔ پیچیده‌تر از مسائلی است که می‌توانند در انتخاب مدل غیر آشیانی مورد توجه قرار بگیرند.

References

[1] Akaike, H., (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In Second International Symposium on Information Theory, AkademiaiKiado, Budapest, 267-281.

[2] Akkaya, A., Tiku, M. (2007). Estimating Parameters Autoregressive Models in Nonnormal Situation: Asymmetric Innovations. Communications in Statistics: Theory and Methods, **30**, 517-536.

[3] Bedrick, Edward J. and Tsai, C-L. (1994). Model Selection for Multivariate Regression in Small Samples. Biometrics, 50, 226-231

[4] Claeskens, G, Croux, C., and Kerckhoven, J.V. (2007). Prediction Focussed Model Selectionfor Autoregressive Models. Australian New Zealand Journal of Statistics, **49**, 359-379.

[5] Durbin, J. (1960). Estimation of parameters in time-series regression models. Journal of the Royal Statistical Society, **22**, 139-153.

[6] HARVEY, AC, and PHILLIPS, G.D.A. (1979). Maximum Likelihood Estimation of Regression Models With Autoregressive-Moving Average Disturbances, Biometrika, **66**, 49-58.

[7] Kullback, SaL, R.A. (1951). Information and Sufficiency Modelling. Annals of Mathematical Statistic, **22**, 79-86.

[8] Mao, G. (2013). Model selection for regression with heteroskedastic and autocorrelated errors. Economics Letters, 497–501.

[9] McQuarrie, A.D.R, Tsai, C-L. (1988). Regression and Time Series Model Selection. World Scientific, 480pp.

[10] PIERCE, DA. (1971). Least Squares Estimation in the Regression Model With Autoregressive-Moving Average Errors. Biometrika, **58**, 299-312.

[11] Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. Annals of Statistics, **6**, 461-464.

[12] Shi PaT, C,L. A. (2004). Joint Regression Variable and Autoregressive Order Selection Criterion. Journal of Time Series Analysis, **25**(6), 923-941.

[13] Tsay, S. (2012). Regression Models with Time Series Errors. Journal of the American Statistical Association, **79**, 118-124.

[14] White, H. (1982). Maximum Likelihood Estimations of Misspecified Models. Econometrica, **50**, 1-26.

[15] Zamani Mehreyan, S, and Sayyareh, A. (2015). Statistical Inference in Autoregressive Models with Non-negative Residuals. Statistical Research and Training Center, **12**(1), 83–104.

[16] Zamani Mehreyan, S, and Sayyareh, A. (2016). Separated hypotheses testing for autoregressive models with non-negative residuals. Journal of Statistical Computation and Simulation, DOI: 10.1080/00949655.2016-.1222613.