گسترهٔ علوم آماری
سال اول - شماره دوم (ص 31-39)

Statistical Sciences Extension
Year 1 - Number 2 (P 31-39)

برآوردگر موجکی تابع چگالی احتمال و مشتقات آن برای متغیرهای تصادفی سانسورشده تحت وابستگی منفی تعمیم یافته

نرگس حسینیون*
استادیار، آمار، دانشگاه پیام نور

تاریخ دریافت: 1395/03/04 **تاریخ پذیرش**: 1395/06/31

Wavelet-based Estimator for Derivatives of Density Function for Censored and Extended Negatively Dependent Observations

N. Hoseinion*
Assistant Professor, Statistics, Payame Noor University

Received: 2014/05/06 **Accepted:** 2015/05/19

چکیده

نظریهٔ موجک‌ها شاخه‌ای از تحلیل هارمونیک و از پدیده‌های جدید علم ریاضی است که کاربردهای زیادی در ریاضیات و آمار و سایر علوم دارد. این نظریه علی رغم عمر کوتاه خود، به سرعت رشد کرد و تقریباً در هر زمینه‌ای که تحلیل فوریه حضور داشته، به رقابت با آن برخاسته است. در این مقاله یک برآورد ناپارامتری برای تابع چگالی احتمال و مشتقات آن براساس روش موجک برای متغیرهای تصادفی سانسور شده تحت وابستگی منفی تعمیم یافته ارائه می‌دهیم و به بررسی ویژگی‌های آن در فضای بسوف می‌پردازیم. نشان می‌دهیم برآوردگر معرفی شده دارای نرخ بهینهٔ همگرایی برآوردگرهای موجک، تحت زیان $L_p, p \geq 1$ است.

واژگان کلیدی

آنالیز چندریزگی، برآوردگر موجک، فضای بسوف، مشاهدات سانسور شده، وابستگی منفی تعمیم یافته.

Abstract

Wavelet Analysis is a branch of Harmonic Analysis and a new phenomenon of Mathematics science which offers wide range of application in Mathematics, Statistics and other fields. Wavelets analysis is finding a rapidly growing number of applications despite its young age and often replacing the conventional Fourier transform. Basically in this paper, the problem of estimating a density and its derivatives for a sample of censored random variables is considered. The purpose of this paper is to present an approach to this problem based on wavelets methods for extended negatively dependent observations. Besides, we explore its performances under the $L_p, p \geq 1$ risk in Besov ball.

Key words

Multiresolution Analysis, Wavelet estimator, Besov Space, Censored data, Extended Negatively Dependent.

* **نویسنده مسئول**: نرگس حسینیون

*Corresponding Author: mails.students@gmail.com

مقدمه

موجک‌ها ابزاری جدید و قدرتمند در تحقیقات آماری هستند. صرف اینکه بیش از دو دهه از ورود آنها به حوزهٔ علم آمار نمی‌گذرد، نتایج علمی بیشماری پیرامون نقش آنها در شاخه‌های متفاوت علم آمار به رشته تحریر در آمده است. موجک‌ها پایه‌ای متعامد یکه برای فضای $L_2(R)$ تشکیل می‌دهند. این خاصیت و ویژگی‌های دیگر توانایی این پایه متعامد را در مقابل دیگر پایه‌های متعامد، مانند پایه‌های فوریه برجسته ساخته است. همانند میر[1] (1990) یک موجک مادر[2] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف 1: فرض کنید m یک عدد طبیعی باشد. تابع $\psi(x)$ را یک موجک مادر از مرتبه m گوییم، هرگاه

الف) اگر $m=0$، $\psi \in L_\infty(R)$ و اگر $m \geq 0$، تابع ψ و مشتق‌های تا مرتبه m آن متعلق به $L_\infty(R)$ باشند.

ب) تابع $\psi(x)$ و مشتق‌های تا مرتبه m آن، وقتی x به سمت بی‌نهایت می‌رود سریعا نزولی باشند.

ج) برای $0 \le k \le m$، داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x)dx = 0$$

یک روش عمومی برای ساختن پایه‌های متعامد موجکی، تقریب فضای L_∞ یا آنالیز چندریزگی[3] است. جهت آشنایی بیشتر با این روش می‌توان به مالات[4] (1989) و دوبیشی[5] (1988و 1992) مراجعه کرد. همانند مالات و دوبیشی یک آنالیز چندریزگی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

فرض کنیم $V_j = \overline{\text{span}}\{\varphi_{j,k} : k\in Z\}$. می‌دانیم که $\{\varphi_{j,k}, k\in Z\}$ یک پایه متعامد یکه برای V_j است که V_j شامل تمام توابعی است که قطعه‌وار ثابت هستند. در فواصلی که طول آنها دقیقاً دو برابر طول بازه‌هایی است که در V_{j-1} است. دنباله $\{V_j\}_{j\in Z}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) برای هر $j\in Z$ ، $V_j \subset V_{j+1}$.

ب) $\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j} = L^2(R)$.

ج) برای هر $j\in Z$ ، $f(x)\in V_j$ اگر و فقط اگر $f(2x)\in V_{j+1}$.

د) برای هر $k\in Z$، $f(x)\in V_0$ اگر و فقط اگر $f(x-h)\in V_0$.

ه) تابعی مانند $\varphi(x)\in V_0$ وجود دارد به طوری که خانواده $\{\varphi(x-k): k\in Z\}$ یک پایه متعامد یکه برای V_0 است.

یک تحلیل چندریزگی برای $L^2(R)$ یک دنباله $\{V_j\}_{j\in Z}$ از زیر فضای بسته خطی $L^2(R)$ است که در شرایط فوق صدق می‌کند و به طور اختصاری با MRA نشان داده می‌شود. تابع φ یک تابع مقیاس برای $\{V_j\}_{j\in Z}$ نامیده می‌شود. همچنین $\{V_j\}_{j\in Z}$ را یک تحلیل چند ریزه‌ساز تولید شده به وسیلهٔ تابع φ می‌نامند. تابع φ موجک پدر و $\varphi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x-k)$ را تحلیل چندریزگی می‌نامند. همچنین از شرایط فوق می‌توان نتیجه گرفت که $\{\varphi_{j,k}; k\in Z\}$ تشکیل یک پایه متعامد برای V_j می‌دهند.

اخیراً موضوع تحلیل موجکی مورد توجه زیاد ریاضی‌دانان و مهندسان قرار گرفته است. برخی به آن به عنوان پایه‌ای جدید برای نمایش توابع می‌نگرند و عده‌ای آن را به عنوان تکنیکی برای تحلیل زمان بسامدی به حساب می‌آورند و گروهی نیز آنرا به عنوان شاخهٔ جدید ریاضیات می‌دانند. موجک‌ها بنا به خواص متعددشان در تحقیقات آماری مورد توجه ویژه قرار گرفته‌اند. اولین بار موجک‌ها را داناهو[6] وجانستون[7] (1996و1995) در تحقیقات آماری به کار بردند. در چند سال اخیر کتاب‌ها و مقالات متعددی که در زمینهٔ کاربرد موجک‌ها در شاخه‌های مختلف آمار به چاپ رسیده است اهمیت موضوع را نشان می‌دهد. جالب است بدانیم اولین کاربردهای روش موجک در آمار، تلاش‌هایی در برآورد تابع چگالی احتمال بوده است که برای نمونه می‌توان مقالات دوخان[8] و لوئن[9] (1990) را

1. Meyer
2. Mother Wavelet
3. Multiresolution Analysis
4. Mallat
5. Daubechies

6. Donoho
7. Jonstone
8. Doukhan
9. Loen

نام برد. برای مطالعه دلایل برتری برآوردگر موجکی بر روش‌های معمول دیگر درمسئله برآورد تابع چگالی احتمال، مقالات کرکیاچاریان[1] و پیکارد[2] (1992)، تریبلی[3] (1995)، لیبلانس[4] (1996) و پراکسا رائو[5] (1983) مراجعه کنید. آنتونیادیس[6] و کارمونا[7] (1991)، دوناهووجانستون (1996) برآورد موجکی خطی برای تابع چگالی احتمال ارائه دادند و خواص آن را در دو فضای بسوف[8] و سوبلوف[9] مطالعه کردند. حسینیون و دیگران (2012) یک برآوردگی موجکی برای تابع چگالی احتمال در حالت آمیختگی ارائه کردند و به بررسی ویژگی‌های آن پرداختند. به علاوه می‌توان به تلاش‌های شسنو[10] و دوستی (2012) وشسنو و حسینیون (2013) نیز اشاره کرد.

در این مقاله یک برآورد موجکی برای مشتقات تابع چگالی احتمال ارائه خواهیم داد. در حالتی که مشاهدات سانسور شده‌اند و دارای وابستگی منفی تعمیم یافته[11] هستند ارائه خواهیم داد. این حالت وابستگی که تعمیم از وابستگی منفی است، اولین بار لیو[12] (2009) ارائه شده است.

تعریف 2: یک دنباله از متغیرهای تصادفی $X_k, K=1,...,n$ را وابسته منفی تعمیم یافته بالایی[13] می‌نامیم، هرگاه به ازای $M>0$ داشته باشیم:

$$\Pr(\bigcap_{i=1}^{n} (X_k \le x_k)) \le \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_k \le x_k)$$

و آن را وابستهٔ منفی تعمیم یافته پایینی[14] می‌نامیم، هرگاه به ازای $M>0$ داشته باشیم:

$$\Pr(\bigcap_{i=1}^{n} I(X_k > x_k)) \le \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_k > x_k)$$

بنابراین دنباله متغیرهای تصادفی معرفی شده شامل کلاس بزرگی از متغیرهای تصادفی وابسته هستند. به علاوه متغیرهای تصادفی که دارای تابع nمتغیره فارلی-گامبل-مورگنسترن[15] که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x_1,...,x_n) = (\prod_{k=1}^{n} F_K(x_k))(1+\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}\bar{F}_i(x_i)\bar{F}_j(x_j))$$

دارای خاصیت وابستگی ذکر شده هستند که در آن $F_K = 1-\bar{F}_K, k=1,..n$ توابع حاشیه‌ای و a_{ij} طوری انتخاب می‌شود که F تابع چگالی n متغیره باشد. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد این تابع می‌توان به کوتز[16] (2000) مراجعه کرد. لازم به ذکر است که این تابع دارای انعطاف‌پذیری بالا و توانمندی ممتاز در مشخص کردن وابستگی‌ها است و به همین جهت در مبحث اقتصاد جهت مدل‌بندی وابستگی مقادیر بازده سرمایه‌گذاری‌ها استفاده می‌شود. برای مثال تانگ و ورنیک[17] (2007) و کوزیت[18] و همکاران (2008) را ببینید.

این مقاله دارای ساختاری به شرح زیر است: ابتدا ضمن ارائهٔ یک مقدمه از مشاهدات سانسور شده برآوردگر موجکی تابع چگالی احتمال و مشتقات آن را معرفی می‌کنیم و ضمن توجه به شرایط وابستگی مشاهدات، به بررسی ویژگی‌های برآوردگر موجکی خواهیم پرداخت. نرخ همگرایی برآوردگر تحت زیان $L_p, p\ge 1$ بررسی و سپس با نرخ بهینه برآوردگرهای موجکی مقایسه می‌شود.

ساختار برآوردگر موجک

فرض کنید $\{X_n, n\ge 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $\{\Omega, F, P\}$ و X_i ها کراندار و تکیه‌گاه فشرده باشد و دارای تابع چگالی مشترک f باشند که f نیز دارای تکیه‌گاه کراندار است. حال برای $i=1,...,n$، مدل تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_i = U_i X_i$$

که درآن متغیرهای تصادفی U_iدارای توزیع یکنواخت در بازه [0,1] و مستقل از $\{X_n, n\ge 1\}$ هستند. هدف برآورد مشتق مرتبه $m, m\ge 0$ تابع چگالی احتمال به کمک متغیرهای تصادفی Y_i است. برای مطالعهٔ بیشتر این

1. Kerkyacharian
2. Picard
3. Tribouley
4. Leblance
5. Prakasa Rao
6. Antoniadis
7. Carmone
8. Besov space
9. Sobolev space
10. Chesneau
11. Extended negatively dependent
12. Liu
13. Lower extended negatively dependent
14. Lower extended negatively dependent

15. Farlie- Gumbel- Morgenestern
16. Cossette, H.
17. Tang and Vernic
18. Cossette

ساختار مشاهدات سانسور شده می‌توان به عباس‌زاده (2013) مراجعه کرد. حال بسط تابع f را (مطابق تعریف موجک دوبیشی) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\sum_{k\in Z} a_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j\ge j_0}\sum_{k\in Z} b_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

$$=P_{j_0}f+\sum_{j\ge j_0} D_{j_0} f$$

(1)

که در آن پایه‌های موجکی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\phi_{j_0,k}(x)=2^{j_0/2}\phi(2^{j_0}x-k)$$

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j_0/2}\psi(2^{j}x-k)$$

و تشکیل پایهٔ متعامد در فضای $L_2(R)$ را می‌دهند و ضرایب موجکی نیز به صورت زیر هستند:

$$a_{j_0,k}=E(\phi_{j_0,k}(X))=\int f(x)\phi_{j_0,k}(x)dx,$$

$$b_{j,k}=E(\psi_{j,k}(X))=\int f(x)\psi_{j,k}dx$$

(2)

همانند روشی که رائو (2003) بررسی کرده است، فرض می‌کنیم ψ تابع مقیاس تولید شده به وسیلهٔ تحلیل چند ریزه‌گی[1] و منظم[2] از درجه r است، یعنی $\psi\in C^{r+1}, r\in N$ و علاوه برآن تابع مقیاس ψ دارای تکیه‌گاه فشرده در $[-d,d]$ است. به علاوه اگر تابع f متعلق به فضای بسوف باشد، برای $0\le s\le r+1$ و $p,q\ge 1$ داریم:

$$\left\{\sum_{j\ge j_0}\left[2^{j\left(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\left(\sum_{k}\left|b_{j,k}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}<\infty$$ و

$$\left(\sum_{k}\left|a_{j_0,k}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \qquad (3)$$

بسیاری از محققین مسائل مورد علاقه خود را در این فضا مطرح می‌کنند. مزیت آن این است که در حل بسیاری از مسایل ریاضی نیاز به هموارسازی داریم که در این فضا به سادگی محقق می‌شود. برای مطالعه بیشتر در مورد کاربردهای فضای بسوف در مبحث برآورد تابع چگالی به تریبلی (1995) مراجعه کنید. در ادامه به دنبال معرفی برآوردگر مورد نظر، فرض کنید $J\in\{0,\dots,m\}$ و $f^{(J)}\in L_2[0,1]$. بنابراین مشابه رابطه (1.2) داریم:

$$f^{(m)}(x)=\sum_{k\in Z} a^{(m)}_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j\ge j_0}\sum_{k\in Z} b^{(m)}_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

$$=P_{j_0}f+\sum_{j\ge j_0} D_{j_0} f$$

(4)

و ضرایب موجکی نیز به صورت مشابه روابط(2.2) به صورت زیر هستند:

$$a^{(m)}_{j_0,k}=\int f^{(m)}(x)\phi_{j_0,k}(x)dx=(-1)^m\int f(x)\phi^{(m)}_{j_0,k}(x)dx,$$

$$b^{(m)}_{j,k}=\int f^{(m)}(x)\psi_{j,k}(x)dx=(-1)^m\int f(x)\psi\int f(x)\psi^{(m)}_{j,k}(x)dx$$

(5)

به علاوه از آنجا که طبق تعریف $U_i\sim U[0,1]$ و X_i مستقل از تعریف شده‌اند، به راحتی می‌توان تابع چگالی احتمال Y_1 را به صورت زیر نوشت:

$$h_Y(x)=\int_0^1 y^{-1}f(y)dy,\quad x\in[0,1]$$

پس طبق آن به سادگی داریم:

$$f(x)=-xh'(x),\quad x\in[0,1] \qquad (6)$$

حال با استفاده از انتگرال جزء به جزء می‌توان ضرایب موجکی روابط 5 را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{a}^{(m)}_{j_0,k}=(-1)^m\int -xh'(x)\phi^{(m)}_{j_0,k}(x)dx$$

$$=(-1)^m\int(\phi^{(m)}_{j_0,k}(x)+x\phi^{(m+1)}_{j_0,k}(x))h(x)dx$$

$$=(-1)^m E((\phi^{(m)}_{j_0,k}(Y_1)+Y_1(\phi^{(m+1)}_{j_0,k}(Y_1))$$

1. Multiresolution Analysis
2. Regular

مشابه آنچه انجام شد برای ضریب موجکی دوم نیز صادق است، یعنی:

$$b_{j,k}^{(m)} = (-1)^m E(\psi_{j,k}^{(m)}(Y_1) + Y_1\psi_{j,k}^{(m+1)}(Y_1))$$

در نهایت می‌توانیم برآوردگر نااریب ضریب موجکی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\hat{a}_{j_0,k}^{(m)} = (-1)^m \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\phi_{j_0,k}^{(m)}(Y_i) + Y_1\phi_{j_0,k}^{(m+1)}(Y_i)) \qquad (7)$$

برای بررسی چگونگی شکل‌گیری این برآوردگر می‌توان به رائو (2003) مراجعه کرد. بالاخره برآوردگر موجکی تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}^{(m)}(x) = \sum_{k\in K_{j_0}} \hat{a}_{j_0,k}^{(m)}\phi_{j_0,k}(x) \qquad (8)$$

علاوه بر آن، دقت کنید که K_{j_0} مجموعه‌ای از اندیس‌های k تعریف می‌شود که $\mathrm{Supp}(f)\cap \mathrm{Supp}(\psi_{j_0,x})\neq\emptyset$، از طرفی چون تابع مقیاس ψ متعامد است، پس K_{j_0} متناهی است و $\mathrm{card}(K_{j_0}) = O(2^{j_0})$.

نرخ هم‌گرایی برآوردگر

در این بخش به بررسی خواص برآوردگر معرفی شده خواهیم پرداخت. در این بخش فرض می‌شود که برای $s>0,\ t,q\geq 0$، تابع تحت بررسی در فضای بسوف قرار دارد، یعنی $f^{(m)}\in B_{t,q}^{s}$ و C مقداری ثابت و مستقل از j و k است. به علاوه فرض کنید برای $J\in\{0,...,m\}$ و ثابت‌هایی مانند C، داشته باشیم:

$$\mathrm{Sup}_{0<x<1}h(x) < C \quad و \quad \int_0^1 (f^{(u)}(x))^2\,dx < C$$

ابتدا چند لم که در مراحل بعدی به آن نیازمند خواهیم بود، بررسی می‌شود.

لم 1: فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته باشند، به طوری‌که $E(X_i)=0$ و $E|X|^K<\infty$ که در آن $K=1,...,n,\ p\geq 2$. آنگاه ثابت C وجود دارد به گونه‌ای که

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^P \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\right)^{P/2}\right)$$

اثبات: این لم که در واقع نامساوی رزنتال[1] را برای مشاهدات وابسته منفی تعمیم یافته نشان می‌دهد، درتانگ و ورنیک (2007) مورد بررسی قرار گرفته است.

لم 2: برای $P\geq 1$ و هر دنباله حقیقی مقدار مانند $\{\theta_{j,k}\}_{j,k}$ و ثابتی مانند C وجود دارد طوری که

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} \theta_{j,k}\phi_{j,k}\right)^p dx < C2^{j(p/2-1)}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\phi_{j,k}|^p$$

اثبات: هاردل(1998) را ملاحظه کنید.

لم 3: تحت روابط (5) و(7) ثابتی مانند C وجود دارد به گونه‌ای که

$$E((\hat{a}_{j_0,k}^{(m)} - a_{j_0,k}^{(m)})^{2P}) \leq Cn^{-P}2^{j(2m+2)P}$$

برهان برای سهولت تعریف می‌کنیم:

(9)

$$\lambda_{i,j,k}^{(m)} = (-1)^m(\phi_{j_0,k}^{(m)}(Y_i) + Y_i\phi_{j_0,k}^{(m+1)}(Y_i))$$

$$\eta_i = \lambda_{i,j,k}^{(m)} - a_{j_0,k}^{(m)}$$

طبق تعریف فوق و از آنجا که $Y_1(\Omega)=[0,1]$ می‌توان نوشت:

(10)

$$|\lambda_{i,j,k}^{(m)}| \leq |(-1)^m(\phi_{j_0,k}^{(m)}(Y_i)| + |Y_i\phi_{j_0,k}^{(m+1)}(Y_i))|$$

$$\leq |(\phi_{j_0,k}^{(m)}(Y_i)| + |\phi_{j_0,k}^{(m+1)}(Y_i))|$$

از طرفی برای $P\geq 1$، بدیهی است که به راحتی به کمک نامساوی هولدر[2] و رابطه 10 خواهیم داشت:

---

1 Rosenthal’s inequality
2 Holder inequality

$$E|\eta_i|^p \le CE\left(|\lambda^{(m)}_{i,j,k}|^p\right)$$
$$\le C\left(E|\varphi^{(m)}_{j_0,k}(Y_i)|^p + E|\varphi^{(m+1)}_{j_0,k}(Y_i)|^p\right)$$

(11)

در قدم بعد به راحتی و با استفاده از تغییر متغیر $y = 2^j x - k$ داریم:

(12)

$$E\left(|\varphi^{(m)}_{j_0,k}(X)|^p\right) = \int_0^1 h(x)|\varphi^{(m)}_{j_0,k}(Y_i)|^p dx \le C\int_0^1 |\varphi^{(m)}_{j_0,k}(Y_i)|^p dx$$
$$= C2^{j_0 p(2m+1)/2}\int_0^1 |\varphi^{(m)}_{j_0,k}(2^j x - k)|^p dx = C2^{j(p(2m+1)/2-1)}\int_{2^j}^{2^j-k} |\varphi^{(m)}(y)|^p dy$$
$$\le C2^{j(p(2m+1)/2-1)}$$

مشابه استدلال فوق کران مشابه زیر برای جمله دوم عبارت 11 حاصل خواهدشد:

(13)

$$E\left(|\varphi^{(m+1)}_{j_0,k}(X)|^p\right) \le C2^{j(p(2m+1)/2-1)}$$

با استفاده از روابط 11 و 12 و لم 1، برای $P \ge 1$ و این واقعیت که η_i در شرایط این لم صدق می‌کند، می‌توان نوشت:

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right)^{2p}\right) \le C(n2^{j(2m+3)p-1} + n^p 2^{j(2m+2)p})$$
$$\le Cn^p 2^{j(2m+2)p}$$

(14)

با استفاده از (14) به راحتی نتیجه می‌شود:

$$E\left((\hat\alpha^{(m)}_{j_0,k} - \alpha^{(m)}_{j_0,k})^{2P}\right) \le C\frac{1}{n^{2p}} n^p 2^{j(2m+2)P} \le n^{-p} 2^{j(2m+2)P}$$

و اثبات کامل است.

به کمک این سه لم می‌توان قضیه اصلی این مقاله را بیان و بررسی کرد:

قضیه 1: فرض کنید $f \in B^s_{r,q}$ که در آن $s > 1, r, q \ge 1$. به علاوه فرض کنید روابط 4 و 5 برقرار باشند. آنگاه برای $P \ge 1$، اگر $s' = Min(s, s - 1/r + 1/p)$، ثابتی مانند C هست که

$$E\left(\int_0^1 \left(\hat f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x)\right)^p\right) \le Cn^{s'p/(2s'+2p+3)}$$

که در آن j مقداری است که $n^{1/(2s'+2m+3)} \le 2^{j_0+1} \le 2n^{1/(2s'+2m+3)}$.

برهان جهت سهولت بررسی رابطه فوق را به دو جزء تجزیه و هریک را به صورت مستقل بررسی خواهیم کرد:

$$E\left(\int_0^1 \left(\hat f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x)\right)^p\right) \le 2^{P-1}(I_1 + I_2)$$

(15)

برای بررسی جزء اول با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز و لم 2 داریم:

$$I_1 = E\left(\int_0^1 \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} (\hat\alpha^{(m)}_{j_0,k} - \alpha^{(m)}_{j_0,k})\varphi_{j_0,k})^P dx\right) \le C2^{j_0(p/2-1)}\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} E(\hat\alpha^{(m)}_{j_0,k} - \alpha^{(m)}_{j_0,k})^p$$
$$\le C2^{j_0(p/2-1)}\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1}\left(E(\hat\alpha^{(m)}_{j_0,k} - \alpha^{(m)}_{j_0,k})^{2P}\right)^{1/2}$$
$$\le C2^{j_0(p/2-1)}2^{j_0}2^{j_0(m+1)P}n^{-p/2}$$

(16)

که درآن خط آخر رابطه 16 با استفاده از لم 3 جایگزین شده است. از طرفی اگر $f \in B^s_{r,q}$ اگر $s' = Min(s, s - 1/r + 1/p)$ فرض شود می‌توان نتیجه گرفت که $B^s_{p,q} \subset B^{s'}_{p'q}$ (برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به تریبل[1] (1992) مراجعه کرد.)، پس به راحتی داریم:

$$I_2 = \int_0^1\left(\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta^{(m)}_{j,k}\psi_{j,k}\right)^P dx \le C2^{j_0 s'p}$$

(17)

با جای‌گذاری روابط 16 و 17 در رابطه 15 نتیجه حاصل می‌شود.

1. Triebel

تبصره 1: نرخ هم‌گرایی به دست آمده در قضیه 1 همان نرخ برآوردگر موجک معادل حالتی است که برای متغیرهای تصادفی مستقل به دست آمده است. به علاوه این نرخ معادل نرخ بهینه برآوردگرهای موجک حاصل شد که انعطاف پذیری و توانایی بالای برآوردگرهای موجکی تحت شرایط وابستگی و سانسورشده و حتی هم‌زمان هر دو این دو محدودیت را آشکار می‌سازد. برای بررسی بیشتر در مورد نرخ بهینهٔ برآوردگرهای موجک به هاردل و دیگران (1988) مراجعه نمایید.

تبصره 2: می‌توان به کمک دو تابع $h(x)$ و مشتق آن نیز یک برآوردگر موجکی طبق رابطه 6 به صورت زیر تعریف کرد:

$$\tilde{f}^{(m)} = m(\hat{h}^{(m)}(x) + x(\hat{h}^{(m+1)}(x))$$

این برآوردگر دارای این عیب است که به دلیل برآورد دو تابع $\hat{h}^{(m)}(x)$ و $\hat{h}^{(m+1)}(x)$ دارای خطای بیشتری نسبت به برآوردگر ارائه شده در رابطه (4) خواهد بود.

اطلاعات بیشتر در مورد برآوردگرهای فوق در عباس‌زاده و همکاران (2013) قابل دسترسی است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با فرض اینکه مشاهدات دارای ساختار وابستگی منفی تعمیم یافته و سانسور شده هستند، یک برآوردگر موجکی برای مشتقات تابع چگالی احتمال تحت فضای بسوف ارائه شد. موجک‌ها بنا به خواص متعددشان در تحقیقات آماری مورد توجه ویژه قرار گرفته‌اند.

در چند سال اخیر کتاب‌ها و مقالات متعددی که در زمینهٔ کاربرد موجک‌ها در شاخه‌های مختلف آمار به چاپ رسیده است، اهمیت موضوع را نشان می‌دهد. به علاوه اولین کاربردهای روش موجک در آمار، تلاش‌هایی در برآورد تابع چگالی احتمال بوده است . در این مقاله ضمن معرفی برآوردگر موجک، بهینگی این برآوردگر تحت زیان $L_p , p \geq 1$ بررسی شد. نرخ هم‌گرایی زیان برآوردگر معادل نرخ بهینه برآوردگرهای موجک حاصل شد که نشان دهنده انعطاف و توانایی بالای برآوردگرهای موجکی تحت شرایط وابستگی و سانسورشده و حتی هم‌زمان هر دو این دو محدودیت است.

منابع

[1] Abbaszadeh, M., Chesneau, C. and Doosti, H. (2012), Nonparametric estimation of a density under bias and multiplicative censoring via wavelet methods, Statistics and Probability Letters, 82, 932-941.

[2] Antoinadis, A. and R. Carmona, Multiresolution analysis and wavelets for density estimation. Technical report, University of California, Irvine, 1991.

[3] Chen, Y. Chen, A. and Kai W. Ng, (2010). The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables, Journal of Applied Probability, Volume 47, Number 4 (2010), 908-922.

[4] Chesneau, C. and Hosseinioun, N. (2013), On the Wavelet Estimation of a Function in a Density Model with Non-identically Distributed Observations, Chilean Journal of Statistics, Vol. 3, No.1, 31-42.

[5] Chesneau, C. and Doosti, H. (2012), Wavelet linear density estimation for a GARCH model under various dependence structures, Journal of Iranian Statistical Society, 12. 1-21.

[6] Cossette, H.; Marceau, E.; Marri, F. On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula. Insurance Math.
Econom. 43 (2008), no. 3, 444.455.

[7] Daubechies. I. (1992).Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF regional conferences series in applies mathematics. SIAM, Philadelphia

[8] Daubechies .I. (1988). Orthogonal bases of compactly supported wavelets, Communication in pure and Applied Mathematics, 41, 909-996.

[9] Donoho, D. L, Johnstone, I. M. Kerkyacharian, G and Picard, D. (1995). Wavelet shrinkage: Asmptopia (with discussion). Journal of Royal statistical society, ser. B 57, (2), 301-370.

[10] Donoho, D. L., Johnstone, I. M. Kerkyacharian, G and Picard, D. (1996).

Density estimation by wavelet thresholding .The Annals of statistics, 2, 508-539.

[11] Doukhan, P. and J.R. Loen (1990), Une note sur la déviation quadratique d'estimateurs de densités par projections orthogonales, C.R. Acad Sci. Paris, t310, série 1, 425-430.

[12] Hardle, W. Kerkyacharian, G. Picard, and Tsybabov, A. (19۹8). Wavelets Approximation and Statistical Applications. Springer-Verlag, New York.

[13] Hosseinioun. N, Doosti, H., and Nirumand. H.A., (2012). Nonparametric Estimation of the Derivatives of a Density by the method of Wavelet for mixing sequences", Statistical Paper, 53 (1), 195-203.

[14] Kerkyacharian,G,and picard , D. (1992). Density estimation in Besov spaces, Statistics and Probability Letters, 13-15, 24.

[15] Leblanc, F. (1996). Wavelet linear density estimator for a discete –time stochastic process:Lp –losses. Statistics and probability letters, 15, 209-213.

[16] Luo X., Tsai W.-Y., Xu Q.(2009). Pseudo partial likelihood estimators for Cox regression with missing covariates. Biometrika. 2009; 96.

[17] Meyer, Y. (1990). Ondelettes et Operateurs, Herman, paris.

[18] Mallat, S. (1989). A Theory for Multiresolution Signal Decomposition the Wavelet Representation, IEEE Trans. Pattern Anal. And Machine Intelligence, 31, 679-693.

[19] Prakasa Rao, B. L. S. (19۸۳). Nonparametric Functional Estimation, Academic Press, Orlando.

[20] Prakasa Rao, B. L. S. (2003), wavelet linear density estimation for associated sequences. Journal of the Indian Statistical, Association, 41, 369-379.

[21] Tang, Q. and Vernic, R. The impact on ruin probabilities of the association structure among financial risks. Statistics and probability Letters, 77 (2007), no. 14, 1522.1525.

[22] Tribouley, k. (1995). Density estimation by cross-validation with wavelet method. Statistical Neerlandica, 45, 41, 62.

[23] Tribiel, H. (1992). Theory of Function Space II . BrikhaBirkhauser Verlag, Berlin.

[24] Tribouley, k. (1995), Density estimation by cross-validation with wavelet method. Statistical Neerlandica, 45, 41, 62.