مقایسهٔ میانگین مربعات خطای برآوردگرهای انقباضی واریانس توزیع چوله – نرمال با ضریب تغییرات معلوم

ناهید سنجری فارسی‌پور [*1]؛ **نجمه رشیدی** [2]؛ **آرش پیشدست** [3]

دریافت: 1394/02/16
پذیرش: 1394/04/10

چکیده

پارامترهای متعددی در جامعه وجود دارد که برای شناسایی ویژگی‌های آن برآورد دقیق‌تری از پارامترها را نیاز داریم. با برآورد این پارامترها می‌توان در مورد شاخص‌های مختلف مورد بحث در جامعه تصمیم‌گیری کرد. جامعه‌های مورد بررسی آن‌گونه‌ای نیستند که تحت یک تابع توزیع مناسب (خوش‌تعریف و مشخص) بتوان تحلیلی درست روی پارامترهای آن انجام داد؛ برای این منظور معمولا فرض می‌شود که شاخص‌های مشخصی معلوم هستند. برآورد پارامترهای جامعه مورد توجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته که این کار را می‌توان با فرض معلوم بودن ضریب تغییرات، چولگی و یا برجستگی (اطلاعات پیشین) انجام داد. اخیراً لاهیتران و ویجکون (2008) یک روش تعمیم‌یافته را برای به دست آوردن برآوردگرهای انقباضی به دست آوردند.

ما در این مقاله می‌خواهیم بر اساس قضایایی که لاهیتران و ویجکون (2008) مطرح کردند برآوردگرهای انقباضی بهینه را برای پارامترهای میانگین و واریانس توزیع چوله - نرمال به دست آوریم و با استفاده از معیار میانگین بر اساس برآوردگر میانگین به دست آمده برآوردگری برای واریانس توزیع چوله - نرمال معرفی کنیم و با استفاده از معیار میانگین مربعات خطا به مقایسهٔ این دو برآوردگر واریانس بپردازیم.

واژگان کلیدی: ضریب تغییرات، میانگین مربع خطای زیان مقیاسی، برآوردگر انقباضی بهینه، توزیع چوله - نرمال.

---

1. استاد، گروه آمار، دانشگاه الزهرا (***نویسنده مسئول**) sanjari_n@yahoo.com

2. گروه آمار، دانشگاه الزهرا

3. گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی

مقدمه

در نظر گرفتن ضریب تغییرات معلوم در بسیاری از کاربردهای حقیقی استفاده می‌شود. بر این اساس سیرلز (1964)[1]، خان (1968)[2]، آرلونت و هیبرت (1995)[3] برآوردگرهایی برای میانگین جامعه به‌دست آوردند.گلزر و هیلی (1976) و نیز آرنولت و هیبرت (2001) با در نظر گرفتن $\mathrm{T(X)}$ به‌عنوان یک آماره بسنده مینیمال و تابع پارامتری مورد نظر، این برآوردگر را تعمیم دادند. وچکو و ویجکون (2005)[4] نتایج آنها را بهبود دادند و برآوردگرهای انقباضی[5] را برای میانگین در خانواده‌های نمایی تک پارامتری به دست آوردند. گلزر و هیلی (1976)[6] مینیمم میانگین مربعات خطای برآوردگر را برای θ به دست آوردند. در سال‌های اخیر لاهیتران و ویجکون[7] (2008) نتایج قبلی را تعمیم دادند و برآوردگرهای انقباضی بهینه را برای پارامترهای جامعه زمانی‌که اطلاعات اضافی در دسترس باشد را به دست آوردند. در ادامه یکی از قضایایی که توسط لاهیتران و ویجکون مطرح شد را می‌آوریم و با استفاده از آن برآوردگرهای انقباضی بهینه را برای پارامترهای توزیع چوله –نرمال به دست می‌آوریم.

نتایج اصلی

ابتدا قضیه زیر را که لاهیران و ویجکون (2008) اثبات نموده‌اند را بیان می‌کنیم:

قضیه 1: فرض کنید $X = (\mathrm{X_1, \dots, X_n})'$ یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای با توزیع $f(x,\theta)$ و $g(\theta)$ یک تابع حقیقی مقدار روی فضای پارامتری θ باشد و $T(x)$ یک برآوردگر نقطه‌ای $g(\theta)$ با $E[T(X)] = kg(\theta)$ که $k \in R$ باشد، بدون از دست دادن کلیت قضیه $k > 0$ در نظر گرفته می‌شود اگر نسبت $\tau^2 = [g(\theta)]^{-2}\mathrm{var}[T(X)]$ مستقل از θ باشد آنگاه $T^*(\mathrm{x}) = \alpha^*\mathrm{T(x)}$ به‌طور یکنواخت میانگین مربعات خطا را در میان تمام برآوردگرهای کلاس $C_{\mathrm{T}}(\alpha) = \{\alpha T(X) | 0 < \alpha < \infty\}$ که $\alpha^* = k/\left((\mathrm{k}^2 + \tau^2)\right)$ مینیمم می‌کند.

با توجه به قضیهٔ (1.2) در اینجا سه نوع برآوردگر که عبارتند از برآوردگر بهینه انقباضی و برآوردگری برای واریانس جامعه و برآوردگری برای میانگین جامعه را ارائه می‌دهیم.

برای به دست آوردن $\mathrm{T(X)}$ برآوردگری برای میانگین جامعه،ابتدا یک برآوردگر نقطه‌ای (یا آماره بسنده کامل) $\mathrm{T(X)}$ را برای برآورد $g(\theta)$ مطابق با توزیعی که می‌خواهیم برآوردگر بهینه انقباضی برای میانگین آن به‌دست آوریم، معرفی می‌کنیم؛ به‌طوری‌که $E[T(X)] = kg(\theta)$ و مطابق با قضیه (1-2) برآوردگر $\mathrm{T(X)}$ را به دست می‌آوریم.

توضیحات بالا نیز برای به دست آوردن برآوردگر انقباضی بهینه برای واریانس جامعه؛ $T_{\mathrm{v}}^*(\mathrm{X})$ که در این مقاله به اختصار با نماد OSE [8] نشان می‌دهیم، بکار می‌رود با این تفاوت که در اینجا می‌خواهیم برآوردگر بهینه انقباضی را برای واریانس توزیع به دست آوریم،که باید مطابق با واریانس توزیع، برآوردگر اولیه $\mathrm{T(X)}$ معرفی شود.

بر اساس $T^*(\mathrm{x})$ (برآورد میانگین جامعه) برآورد دیگری برای واریانس جامعه با نام اختصاری MBE[9] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_{\mu}^*(\mathrm{x}) = \nu^2[\mathrm{T}^*(\mathrm{x})]^2$$

که υ ضریب تغییرات است،که معلوم فرض شده است و هدف مقایسه بین دو برآوردگر $T_{\mathrm{v}}^*(\mathrm{x})$ و $T_{\mu}^*(\mathrm{x})$ است.

---

1. Searls
2. Khan
3. Arnholt and Hebert
4. Wencheko and Wijekoon
5. Optimal shrunken estimators
6. Gleser and Healy
7. Laheetharan and wijekoon
8. Optimal Shrunken Estimator
9. Mean Based Estimator

برای مقایسهٔ این دو برآوردگر MSE این دو برآوردگر را با هم مقایسه می‌کنیم.

همان‌طور که می‌دانیم

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + [B(\hat{\theta})]^2 \quad (1)$$

که

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (2)$$

اریبی است. اگر

$$L(\theta,\hat{\theta}) = (\hat{\theta}-\theta)^2 \quad (23)$$

باشد و بنابراین

$$MSE(\hat{\theta}) = E_{\theta}(\hat{\theta}-\theta)^2 \quad (24)$$

تابع زیان دیگری با عنوان تابع زیان مربع خطاهای مقیاسی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_S(\theta,\hat{\theta}) = \frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{\theta^2} \quad (5)$$

پس

$$SMSEL[\hat{\theta}] = MSE_L(\hat{\theta}) = E_{\theta}[\frac{(\hat{\theta}-\theta)}{\theta}]^2 \quad (6\text{-}2)$$

و بنابراین

$$SMSEL[T^*(x)] = \tau^2(k^2+\tau^2)^{-1}[g(\theta)]^2$$

می‌باشد که $T^*(X)$ برآوردگری برای میانگین جامعه است.

توزیع چوله - نرمال[1]

حال با استفاده از قضیهٔ ذکرشده برآوردگر انقباضی را برای توزیع چوله - نرمال به دست می‌آوریم. توزیع چوله - نرمال در سال 1985 توسط آزالینی[2] ارائه شد.

تعریف 1: گوییم متغیر تصادفی Z_λ دارای توزیع چوله-نرمال با پارامتر حقیقی l

است اگر تابع چگالی آن به صورت:

$$\phi(Z,\lambda) = 2\phi(Z)\Phi(\lambda Z) Z \in \mathcal{R} \quad (6)$$

باشد که در آن ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی و توزیع تجمعی نرمال استاندارد هستند. هنگامی‌که Z_λ دارای توزیع چوله- نرمال است به اختصار آن را با نماد $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ نمایش می‌دهیم.

پارامتر λ در این توزیع را می‌توان پارامتر کنترل چولگی نامید. تابع چگالی چوله-نرمال به ازای مقادیر مثبت λ چوله به راست، به ازای مقادیر منفی λ چوله به چپ و به ازای $\lambda = 0$ متقارن و به چگالی نرمال استاندارد تبدیل می‌شود.

چند خاصیت تابع چگالی چوله- نرمال

فرض کنید متغیرهای تصادفی Z و Z_λ به ترتیب دارای توزیع نرمال استاندارد و توزیع چوله-نرمال باشند. در این صورت روابط و نتایج زیر را خواهیم داشت:

الف) $-Z_\lambda$ دارای توزیع چوله - نرمال با پارامتر $-\lambda$ است.

ب) اگر $\lambda = 0$ آنگاه $Z_\lambda \sim N(0,1)$ به عبارت دیگر در این حالت داریم $Z_\lambda \overset{d}{=} Z$

ج) اگر t تابعی زوج باشد، آنگاه رابطهٔ هم‌توزیعی $(tZ_\lambda) \overset{d}{=} t(Z)$ برقراراست. برای مثال داریم

$Z_\lambda^2 \overset{d}{=} Z^2$.

اگر $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$، آنگاه توابع مولد گشتاور و مشخصهٔ آن به ترتیب عبارتند از:

$$M_{Z_\lambda}(t) = 2\exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\}\phi(\delta t) t \in \mathcal{R} \quad (7)$$

$$\Psi_{Z_\lambda} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} [1 + i\int_0^{\delta t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\{\frac{y^2}{2}\}]dy \quad t \in \mathcal{R} \quad (8)$$

که در آنها $\delta = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$.

با استفاده از تابع مولد گشتاور به سادگی می‌توان میانگین و واریانس توزیع چوله - نرمال را به دست آورد. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$\mu = E\left(Z_l\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta \quad (9)$$

و

$$\sigma^2 = Var\left(Z_l\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\delta^2 \quad (10)$$

برآوردگرهای انقباضی توزیع چوله نرمال

1. Skew- normal
2. Azzalini

اگر $T(X) = \sum_{i=1}^{n} Z_{i\lambda}$ را به عنوان برآوردگری برای میانگین توزیع چوله - نرمال در نظر بگیریم طبق قضیهٔ (1) داریم:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_{\lambda i}\right) = n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$$

$$Var[T(X)] = \sum_{i=1}^{n} Var(Z_{\lambda i}) = n\left(1-\frac{2}{\pi}\delta^2\right) \qquad (11)$$

در (6) داریم $\mu = g(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta\,, k = n$ که $\tau^2 = [g(\lambda)]^{-2} var[T(X)] = \left(n\left(1-\frac{2}{\pi}\delta^2\right)\right) / \left(\frac{2}{\pi}\delta^2\right)$ و نیز می‌دانیم ضریب تغییرات که $\nu^2\mu^2\sigma^2 =$ و $\nu=\sigma/\mu$ است که معلوم فرض شده است.

با جایگذاری $\nu = \sqrt{1-\frac{2}{\pi}\delta^2}/\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$ در τ^2 داریم $\tau^2 = n\nu^2$ که مستقل از λ می‌باشد پس مطابق با قضیه (1) داریم:

$$\alpha^* = \frac{k}{k^2+\tau^2} = \frac{n}{n^2+n\nu^2}$$

پس

$T^*(x) = \alpha^* T(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_{i\lambda}}{n+\nu^2}$ که در نتیجه

$$MSE[T^*(X)] = \frac{\sigma^2}{n+\nu^2} = \frac{\nu^2\mu^2}{(n+\nu^2)} \qquad (7\text{-}3)$$

که $SMSEL[T^*(X)] = MSE[T^*(X)]/\mu^2$ که عبارتست از:

$$SMSEL[T^*(X)] = \frac{MSE[T^*(X)]}{\mu^2} = \frac{\nu^2}{n+\nu^2} \qquad (12)$$

حال برآوردگر بهینهٔ انقباضی را برای واریانس توزیع چوله - نرمال به دست می‌آوریم؛ با استفاده از ویژگی قسمت ج توزیع چوله - نرمال داریم :

$$\sum_{i=1}^{n}(Z_{\lambda i}-\bar{Z}_\lambda)^2 \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z}) \qquad (13)$$

و نیز می‌دانیم که $S^2 = 1/(n-1)\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$ که Z_i متغیر تصادفی نرمال استاندارد می‌باشد، پس با استفاده از رابطهٔ بالا داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(Z_{\lambda i}-\bar{Z}_\lambda)^2 \sim \chi^2_{(n-1)} \qquad (10)$$

پس تمام روابطی که برای توزیع نرمال داشتیم برای توزیع چوله - نرمال نیز برقرار است و محاسبات برای به دست آوردن برآوردگر واریانس مطابق توزیع نرمال به دست می‌آید. می‌دانیم که $\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$ آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای σ^2 می‌باشد، پس می‌توانیم مطابق با قضیهٔ گفته‌شده $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$ را به عنوان برآوردگر واریانس توزیع نرمال در نظر بگیریم و داریم $E(S^2) = \sigma^2$ که مطابق با قضیه (2-1)، $k = 1\,, g(\theta) = \sigma^2$ می‌باشد پس

$\tau^2 = [g(\theta)]^{-2} var[T(X)] = \sigma^{-4} var[S^2]$ که

با استفاده از (3-8) داریم:

$$var(S^2) = (2\sigma^4)/(n-1)$$

پس

$$\alpha^* = \frac{k}{k^2+\tau^2} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\tau^2 = \frac{2\sigma^4.\sigma^{-4}}{n-1} = \frac{2}{n-1}$$

پس مطابق با قضیهٔ گفته شده برآوردگر انقباضی برای واریانس به صورت

$$\begin{aligned} T_v^*(X) &= \alpha^* T(X) \\ &= \frac{n-1}{n+1}S^2 \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2 \end{aligned} \qquad (14)$$

است که

$$MSE[T_v^*(X)] = \frac{2\nu^4\mu^4}{n+1} \qquad (15)$$

است. برآوردگر دیگری برای واریانس در کلاس $C_{\bar{Z}^2}(X)$ و بر اساس $g(\mu) = \mu^2$ به صورت

$$T_\mu^*(X) = \alpha\left[\sum_{i=1}^{n} Z_{\lambda i}\right]^2 \qquad (16)$$

می‌باشد که با استفاده از قضیه ذکر شده است که

$$\frac{n(n+\nu^2)}{n^2(n+\nu^2)+2\nu^2(2n+\nu^2)}\alpha = \nu^2\mu^2\sigma^2$$

واریانس جامعه می‌باشد. آنگاه

$$MSE\left[T_\mu^*(X)\right] = \frac{2\upsilon^2(2n+\upsilon^2)}{n^2(n+\upsilon^2)+2\upsilon^2(2n+\upsilon^2)}\sigma^4 \qquad (17)$$

و در نتیجه با مقایسهٔ دو برآوردگر $T_\mu^*(X)\,, T_v^*(X)$ به وسیله SMSEL آنها داریم:

$$\begin{aligned} SMSEL\left[T_\mu^*(X)\right] - SMSEL\left[T_v^*(X)\right] &= \frac{2\upsilon^2(2n+\upsilon^2)}{n^2(n+\upsilon^2)+2\upsilon^2(2n+\upsilon^2)} \\ &\quad - \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

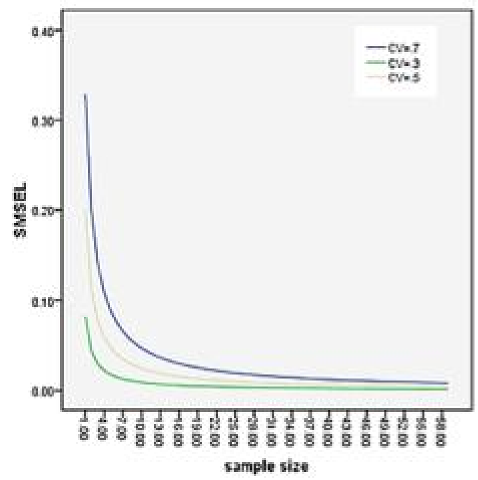
$$RE = \frac{MSE\left[T_\mu^*(X)\right]}{MSE\left[T_\upsilon^*(X)\right]} \qquad (18)$$

که نتایج عددی هر کدام از میانگین مربع خطای زیان مقیاسی[1] $T_\mu^*(X)\,, T_v^*(X)$ برای حجم نمونه از $n = 2$

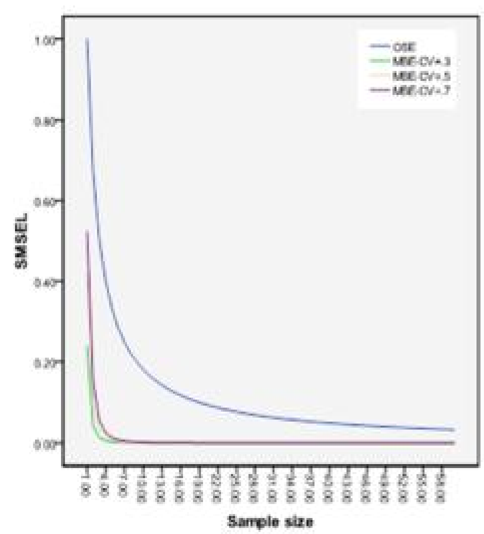
1. Scaled mean square error loss

تا $n = 51$ و ضریب تغییرات متفاوت در جدول 1 داده شده است.

در نهایت در شکل 1 می‌بینیم که $SMSEL(T^{*}(X))$ با افزایش υ، افزایش می‌یابد. در شکل (1a) SMSEL مربوط به $T_{\mu}^{*}(X)$ و $T_{\upsilon}^{*}(X)$ رسم گردیده که مشاهده می‌کنیم با افزایش n (حجم نمونه)، $SMSEL$ کاهش می‌یابد و $SMSEL[T_{\mu}^{*}(X)]$ در مقایسه با $SMSEL[T_{\upsilon}^{*}(X)]$ کمتر می‌باشد و بنابراین $T_{\mu}^{*}(X)$ بهتر یا کاراتر از $T_{\upsilon}^{*}(X)$ می‌باشد و نیز با رسم نمودار

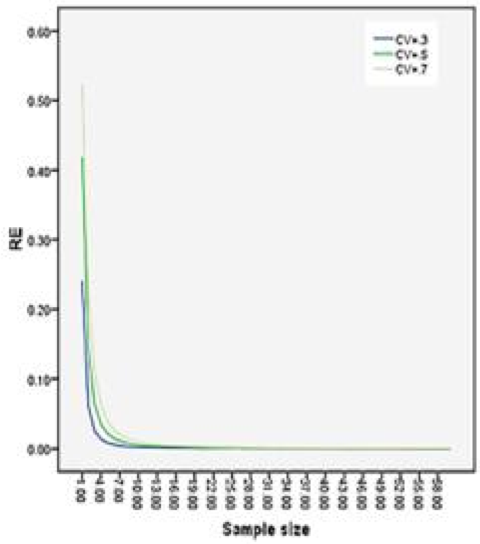


شکل 1. نمودار SMSEL در برآورد میانگین (توزیع نرمال- چوله) با تغییرات اندازهٔ نمونه



شکل 2. نمودار SMSEL برای برآورد واریانس (توزیع نرمال- چوله) در برابر تغییرات اندازهٔ نمونه

کارایی آن (شکل2b) می‌بینیم که با افزایشυ، کارایی آن نیز کاهش می‌یابد.



شکل 3. نمودار RE برای برآورد واریانس (توزیع نرمال- چوله) با تغییرات اندازهٔ نمونه

نتیجه‌گیری

برآوردگرهای انقباضی بهینه برای پارامترهای توزیع چوله - نرمال همانند برآوردگرهای انقباضی بهینه برای توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^{2})$ می‌باشند و این مطلب را به راحتی می‌توان در توزیع نرمال تحقیق نمود. ملاحظه کردیم که در کلاس $C_{\bar{Z}^{2}}(X)$ برآوردگر انقباضی بهینهٔ واریانس، کارایی بهتری نسبت به برآوردگر انقباضی بهینهٔ واریانس توزیع چوله - نرمال دارد و این موضوع برای اندازه نمونه‌های مختلف برقرار است. به نظر می‌رسد کلاس برآوردگرهای انقباضی کارایی به مراتب بهتری نسبت به برآوردگرهای دیگر دارند و بخصوص برای اندازه نمونه‌های کوچک‌تر زمانی که ضریب تغییرات معلوم باشد، کارایی بهتری نسبت به برآوردگرهای دیگر دارند.

RE−CV=.7	RE−CV=.5	RE−CV=.3	OSE	MBE−CV=.7	MBE−CV=.5	MBE−CV=.3	n
۰٫۲۲۴۰	۰٫۱۴۴۵	۰٫۰۴۰۴	۰٫۶۶۶۷	۰٫۱۵۰۷	۰٫۰۴۰۴	۰٫۰۹۵۰	۲
۰٫۱۰۹۷	۰٫۰۴۳۷	۰٫۰۴۵۲	۰٫۵۰۰۰	۰٫۰۵۳۸	۰٫۰۱۲۴	۰٫۰۳۱۸	۳
۰٫۰۴۲۹	۰٫۰۳۵۲	۰٫۰۱۳۵	۰٫۴۰۰۰	۰٫۰۹۵۱	۰٫۰۰۵۴	۰٫۰۱۶۱	۴
۰٫۰۴۰۴	۰٫۰۲۲۱	۰٫۰۰۸۴	۰٫۳۳۳۳	۰٫۰۱۳۵	۰٫۰۰۲۸	۰٫۰۰۷۴	۵
۰٫۰۲۸۰	۰٫۰۱۵۲	۰٫۰۰۵۷	۰٫۲۸۵۷	۰٫۰۰۸۰	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۴۳	۶
۰٫۰۲۰۴	۰٫۰۱۱۰	۰٫۰۰۴۱	۰٫۲۵۰۰	۰٫۰۰۵۱	۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۰۲۸	۷
۰٫۰۱۵۷	۰٫۰۰۸۴	۰٫۰۰۳۱	۰٫۲۲۲۲	۰٫۰۰۳۵	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۱۹	۸
۰٫۰۱۲۴	۰٫۰۰۶۶	۰٫۰۰۲۴	۰٫۲۰۰۰	۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۱۳	۹
۰٫۰۱۰۰	۰٫۰۰۵۳	۰٫۰۰۲۰	۰٫۱۸۱۸	۰٫۰۰۱۸	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۱۰	۱۰
۰٫۰۰۸۳	۰٫۰۰۴۴	۰٫۰۰۱۶	۰٫۱۶۶۷	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۷	۱۱
۰٫۰۰۶۹	۰٫۰۰۳۶	۰٫۰۰۱۳	۰٫۱۵۳۸	۰٫۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۶	۱۲
۰٫۰۰۵۹	۰٫۰۰۳۱	۰٫۰۰۱۱	۰٫۱۴۲۹	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۴	۱۳
۰٫۰۰۵۱	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۰۱۰	۰٫۱۳۳۳	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۳	۱۴
۰٫۰۰۴۴	۰٫۰۰۲۳	۰٫۰۰۰۸	۰٫۱۲۵۰	۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۳	۱۵
۰٫۰۰۳۹	۰٫۰۰۲۰	۰٫۰۰۰۷	۰٫۱۱۷۶	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۲	۱۶
۰٫۰۰۳۴	۰٫۰۰۱۸	۰٫۰۰۰۷	۰٫۱۱۱۱	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۲	۱۷
۰٫۰۰۳۱	۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۰۰۶	۰٫۱۰۵۳	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۲	۱۸
۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۵	۰٫۱۰۰۰	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۱	۱۹
۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۰۱۳	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۹۵۲	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۰
۰٫۰۰۲۲	۰٫۰۰۱۲	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۹۰۹	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۱
۰٫۰۰۲۰	۰٫۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۸۷۰	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۲
۰٫۰۰۱۹	۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۸۳۳	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۳
۰٫۰۰۱۷	۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۸۰۰	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۴
۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۷۶۹	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۵
۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۷۴۱	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۶
۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۷۱۴	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱	۲۷
۰٫۰۰۱۳	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۶۹۰	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۲۸
۰٫۰۰۱۲	۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۶۶۷	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۲۹
۰٫۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۶۴۵	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۰
۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۶۲۵	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۱
۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۶۰۶	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۲
۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۵۸۸	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۳
۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۵۷۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۴
۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۵
۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۵۴۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۶
۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۵۲۶	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۷
۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۵۱۳	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۸
۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۵۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۳۹
۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۸۸	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۰
۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۷۶	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۱
۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۶۵	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۲
۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۵۵	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۳
۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۴۴	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۴
۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۳۵	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۵
۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۲۶	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۶
۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۱۷	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۷
۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۰۸	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۸
۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴۹
۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۳۹۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۵۰
۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۳۸۵	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۵۱

جدول ۱. برآوردگرهای واریانس و کارایی آن **SMSEL**

References

Arnholt, A.T. and Hebert, J.L. (1995). Estimating the mean with known coefficient of variation. Am. Stat. 49:367–369.

Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. Scandinavian Journal of Statistics 12, 171-178.

Gleser, L.J. and Healy, J.D. (1976). Estimating the mean of a normal distribution with known coefficient of variation. J. Am. Stat. Assoc. 71:977–981.

Khan R.A. (1968). A note on estimating the mean of a normal distribution with known coefficient of variation. J. Am. Stat. Assoc. 63:1039–1041.

Laheetharan, A. and Wijekoon, P. (2008). Improved estimation of the population parameters when some additional information is available. Stat. Papers 51:889-914.

Searls D.T. (1964). The utilization of a known coefficient of variation in the estimation procedure. J. Am. Stat. Assoc. 59:1225–1226 .

Wencheko, E. and Wijekoon, P. (2005). Improved estimation of the mean in one - parameter exponential families with known coefficient of variation. Stat. Papers. 46:101–11. University of Isfahan.