برخی نتایج حدی برای میانگین موزون تصادفی

رسول روزگار [*1]؛ **عیسی محمودی** [2]

دریافت: 1394/02/15
پذیرش: 1394/04/19

چکیده

میانگین موزون تصادفی جایگزینی مناسب برای میانگین نمونه‌ای در برآورد میانگین مجهول جامعه است به ویژه زمانی‌که متغیرهای تصادفی از ارزش (وزن) یکسانی برخوردار نیستند. این آماره اخیرا مورد توجه برخی آماردانان قرار گرفته و برخی نتایج در محاسبه توزیع آنها به دست آمده است. برقراری نتایج حدی مناسب برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی یکی از ویژگی‌های مهم و کاربردی در احتمال و استنباط آماری به‌ویژه مسئله آزمون فرضیه تلقی می‌شود. در این مقاله به مروری بر برخی نتایج حدی موجود به‌ویژه قانون قوی اعداد بزرگ برای میانگین موزون تصادفی می‌پردازیم و همچنین نتایج جدید شامل قانون ضعیف اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی را در برخی حالات خاص برای میانگین موزون تصادفی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی: میانگین موزون تصادفی، قوانین اعداد بزرگ، قضیه حد مرکزی، میانگین نمونه‌ای.

---

1. استادیار گروه آمار، دانشگاه یزد (***نویسنده مسئول**) rroozegar@yazd.ac.ir

2. دانشیار گروه آمار، دانشگاه یزد emahmoudi@yazd.ac.ir

مقدمه

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع مشترک $F(x)$ باشند. برای اولین بار جانسون و کوتز[1] (1990) میانگین موزون تصادفی از این متغیرهای تصادفی را به صورت

$$S_n = R_1X_1 + R_2X_2 + \cdots + R_nX_n \qquad n \geq 2, \tag{1}$$

معرفی کردند که وزن‌های تصادفی $R_1, R_2, \dots, R_n$ با شرط $\sum_{i=1}^{n} R_i = 1$ به صورت $R_i = U_{(i)} - U_{(i-1)}$ برای $i = 1,2,\dots,n$ در نظر گرفته می‌شوند و $U_{(1)}, \dots, U_{(n-1)}$ آماره‌های ترتیبی متناظر با نمونه تصادفی $U_1, \dots, U_{n-1}$ از توزیع یکنواخت $[0,1]$ هستند ($U_{(n)} = 1$ و $U_{(0)} = 0$). اصطلاحا به چنین متغیرهای (وزن‌های) تصادفی، متغیرهای تصادفی به طور یکنواخت توزیع شده روی یک سیمپلکس واحد گفته می‌شود (دمپستر و کلیل[2] (1968)). سلطانی و روزگار (2012) تعریف (1) را گسترش داده و با استفاده از تکنیک تفاضلات تقسیم شده رابطه‌ای بین تبدیل اشتیلتیس تعمیم‌یافته[3] میانگین موزون تصادفی و تبدیل اشتیلتیس تعمیم‌یافته متغیرهای تصادفی مستقل به دست آوردند. با استفاده از روابط به‌دست‌آمده در سلطانی و روزگار[4] (2012)، کلاس وسیعی از توزیع‌های بتا توسط روزگار و سلطانی[5] (2014) معرفی گردید و توزیع میانگین موزون آن‌ها به دست آمد.

میانگین موزون تصادفی کاربردهای زیادی در بخش‌های مختلف دارد. از جمله در نظریه رگرسیون و شبکه‌های عصبی، برآوردهای هسته چگالی چند متغیره و هسته رگرسیون‌های چند متغیره (نادارایا[6] (1964)). همچنین برآوردی که برای ضرایب رگرسیون p متغیره توسط ژیرو و مینگژانگ[7] (1994) معرفی گردید یک میانگین موزون تصادفی محسوب می‌شود. واتسون[8] (1956) بردار تصادفی ضرایب همبستگی سریالی را در نظر گرفت که هر ضریب یک میانگین موزون تصادفی از ریشه‌های متفاوت یک ماتریس محسوب می‌شوند. کاربردهای بیشتر را می‌توان در سلطانی و روزگار (2012) و مراجع موجود در آن ملاحظه کرد.

ضرورت بررسی رفتار حدی میانگین موزون تصادفی را می‌توان در کارهای نیرهینن[9] (2001) مشاهده کرد زمانی که وزن‌ها به عنوان عوامل تخفیف در دنباله‌ای از زیان‌های شبکه یک شرکت بیمه در نظر گرفته می‌شوند. اگر بخواهیم مسئله آزمون فرضیه در مورد پارامترهای مدل مربوطه برای نمونه‌های بزرگ تشکیل دهیم به نتایج حدی مربوطه نیاز داریم. کول[10] (2002) مدل‌های غیرخطی سری زمانی را در نظر گرفت که قضایای حدی فرآیندهای تجربی موزون در برآورد آماری پارامترهای این مدل بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در حالت کلی نویسندگان متعددی روی نتایج حدی مجموع جزئی موزون با وزن‌های تصادفی یا غیر تصادفی روابط و قضایای کلی را اثبات کرده‌اند. ازجمله می‌توان به مطالعات روسالسکی و اسریهاری[11] (1998) اشاره کرد که رفتار حدی تقریبا مطمئن[12] و همگرایی در احتمال مجموع جزئی وزنی به فرم $\sum_{j=1}^{n} W_{nj} X_{nj}$ را مطالعه کردند بطوری‌که

1. Johnson and Kotz
2. Dempster and Kleyle
3. Generalized Stieltjes Transform
4. Soltani, A. R. & Roozegar, R.
5. Roozegar, R. & Soltani, A.R.
6. Nadaraya
7. Xiru and Mingzhong
8. Watson
9. Nyrhinen
10. Koul
11. Rosalsky and Sreehari
12. Almost sure

$\{W_{nj}, 1 \le j \le n \quad, n \ge 1\}$ و $\{X_{nj}, 1 \le j \le n \quad, n \ge 1\}$ به ترتیب آرایه‌های مثلثی از متغیرهای تصادفی هستند. لیو[1] (2001) میانگین موزون تصادفی را به شکل $\sum_{i=1}^{N} A_i Z_i$ در نظر گرفت که $(N, A_1, A_2, \ldots)$ یک بردار تصادفی با مقادیر $\{0,1,2,\ldots\} \times [0,\infty) \times [0,\infty) \times \ldots$ هستند و $Z_1, Z_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و هم‌توزیع هستند. وی ویژگی‌های مجانبی و شبه‌پایدار[2] این میانگین موزون تصادفی را بررسی کرد. جاو و همکاران[3] (2003) قانون ضعیف و قوی اعداد بزرگ را برای نوعی از میانگین موزون تصادفی به نام میانگین نمونه‌ای از برآورد وزنی تصادفی مورد بررسی قرار دادند. قانون قوی اعداد بزرگ و قانون لگاریتم مکرر (LIL) برای میانگین موزون تصادفی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع تحت شرایط کلی روی وزن‌ها توسط پینگ یان و شیکسین[4] (2007) بررسی گردید. اخیرا نیز یانگ و همکاران[5] (2012) رفتار مجانبی را برای احتمال دمی‌مجموع وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی زیرنمایی[6] تحت یک ساختار وابستگی بررسی کرده‌اند. در حالتی که وزن‌ها غیر تصادفی هستند روهاتگی[7] (1971) روی رفتار حدی مجموع موزون تصادفی نتایج جالبی را به دست آورده است. در این مقاله برخی نتایج حدی در مورد میانگین موزون تصادفی به فرم (1) از جمله قانون ضعیف و قوی اعداد بزرگ مورد بررسی قرار گرفته و قضیه حد مرکزی برای این آماره در قالب سه مثال به دست آمده است.

1. Liu
2. Stable Like
3. Gao et al.
4. Pingyan and Shixin
5. Yang et al.
6. Subexponential
7. Rohatgi

قانون ضعیف اعداد بزرگ برای میانگین موزون تصادفی

در این بخش، به بررسی قانون ضعیف اعداد بزرگ برای میانگین موزون تصادفی می‌پردازیم. قبل از ارائه نتایج اصلی این بخش به بررسی چند لم می‌پردازیم.

لم 1. فرض کنید $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند که از توزیع نمایی با پارامتر 1 تبعیت می‌کنند. آنگاه بردار تصادفی $(\frac{Y_1}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}, (Y_1 / \sum_{i=1}^{n} Y_i, \ldots, Y_n / \sum_{i=1}^{n} Y_i \ldots, \frac{Y_n}{\sum_{i=1}^{n} Y_i})$ با بردار $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ مولفه‌وار هم‌توزیع و دارای توزیع دیریخله با پارامترهای $(1,1,\ldots,1)$ است.

اثبات. با استفاده از روش تبدیلات به‌آسانی قابل اثبات است.

لم 2. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با شرط $E|X_n| < \infty$ و $E(X_n) = \mu$ برای $n = 1,2,\ldots$ باشند. همچنین فرض کنید $\{a_{nk}\}$ دنباله‌ای باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

i. برای هر k، $lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$.

ii. $lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$

iii. برای هر M، $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \le M$.

اگر $max|a_{nk}| \to 0$ زمانی‌که $n \to \infty$ آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \; X_n \xrightarrow{P} \mu$.

اثبات. برای اثبات به پرویت[8] (1966) مراجعه کنید.

8. Pruitt

لم 3. فرض کنید R_i برای $i = 1,2,\dots,n$ متغیرهای تصادفی تعریف شده در بخش 1 باشند. آنگاه با احتمال 1، $\max_{1\le i\le n} R_i \to 0$، زمانی که $n \to \infty$.

اثبات. برای اثبات به دیوروی[1] (1981) مراجعه کنید. بنابراین به راحتی دیده می‌شود که با احتمال 1 برای هر i، $R_i \to 0$ زمانی که $n \to \infty$.

با استفاده از لم‌های 2-2 و 2-3 می‌توان نتیجه اصلی این بخش که قانون ضعیف اعداد بزرگ برای میانگین موزون تصادفی است را در قالب قضیه زیر بیان کرد.

قضیه 1. فرض کنید S_n میانگین موزون تصادفی تعریف شده در بخش 1 باشد. همچنین فرض کنید $E|X_n| < \infty$ و $E(X_n) = \mu$ برای $n = 1,2,\dots$ آنگاه $S_n \xrightarrow{P} \mu$.

قضیه زیر با توجه به تعریف میانگین موزون تصادفی به راحتی دیده می‌شود:

قضیه 2. اگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ حول عدد ثابتی مانند a متقارن باشند S_n نیز حول عدد a متقارن است.

قانون قوی اعداد بزرگ برای میانگین موزون تصادفی

در این بخش، به بررسی قانون قوی اعداد بزرگ برای میانگین موزون تصادفی می‌پردازیم. مشابه بخش قبل یک لم کارگشا که در اثبات قضیه اصلی این بخش استفاده می‌شود بیان می‌گردد. مطالب این بخش مشابه با نتایج جاو و همکاران[2] (2003) در بررسی میانگین نمونه‌ای از برآورد وزنی تصادفی است.

لم 4. فرض کنید $\mathcal{F}$، $\sigma-$ میدان تولید شده توسط متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشد. همچنین S_n و $\bar{X}_n = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$ را به ترتیب میانگین موزون تصادفی و میانگین نمونه‌ای در نظر بگیرید. آنگاه برای هر $n \ge 2$ و $p \ge 1$ یک عدد متناهی مثبت D وجود دارد به طوری‌که

$$E\left[(S_n - \bar{X}_n)^{2p} | \mathcal{F}\right] \le D\left(\frac{V_n^2}{n}\right)^p,$$

جایی‌که $V_n^2 = 1/n \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$.

اثبات. به منظور اثبات این لم توجه کنید که

$$\begin{aligned}(S_n - \overline{X}_n)^{2p} &= \left(\sum_{i=1}^{n} R_i X_i - \overline{X}_n\right)^{2p} \\ &= n^{-2p}\left(\sum_{i=1}^{n} nR_i X_i - n\overline{X}_n\right)^{2p} \\ &= n^{-2p} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \\ &\quad \sum_{i_{2p}=1}^{n} \left(nR_{i_1} X_{i_1} - \overline{X}_n\right) \\ &\quad \times \dots \times \left(nR_{i_{2p}} X_{i_{2p}} - \overline{X}_n\right) \\ &= n^{-2p} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \\ &\quad \sum_{i_{2p}=1}^{n} \prod_{j=1}^{2p} \left(nR_{ij} X_{ij} - \overline{X}_n\right),\end{aligned}$$

براساس لم 2-1، از اینکه $E(Y_i) = 1$ برای $i = 1,2,\dots,n$، بنابراین طبق قانون ضعیف اعداد بزرگ زمانی که $n \to \infty$ عبارت $\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow{P} 1$ برقرار است و بنابراین با استفاده از قضیه اسلاتسکی (فرگوسن[3]، 1996) زمانی که $n \to \infty$ آنگاه $nR_i \xrightarrow{P} Z_i$ برقرار است. بنابراین $(\sum_{i=1}^{n} R_i X_i - \bar{X}_n)^{2p}$ و $n^{-2p}(\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\bar{X}_n)^{2p}$ به‌طور مجانبی و یکنواخت هم توزیع هستند زیرا

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i X_i - \overline{X}_n\right)^{2p} &= n^{-2p}\left(\sum_{i=1}^{n} nR_i X_i - n\overline{X}_n\right)^{2p} \\ &\overset{d}{=} n^{-2p}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\overline{X}_n\right)^{2p}\end{aligned}$$

در نتیجه

1. Devroye
2. Gao, S., Zhang, J. & Zhou, T.
3. Ferguson

$$n^{-2p}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\bar{X}_n\right)^{2p} = n^{-2p} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{2p}=1}^{n} \prod_{j=1}^{2p}\left(nY_{ij}X_{ij} - \bar{X}_n\right), \quad (2)$$

سمت راست تساوی (2) برای عباراتی که امید ریاضی غیر صفر دارند (زیرا برای برخی مقادیر $\left(E\left(Y_{ij}X_{ij} - \bar{X}_n|\mathcal{F}\right)\right) = 0$ به‌صورت $(Y_{i_1}X_{i_1} - \bar{X}_n)^{k_1} \times \dots \times (Y_{i_e}X_{i_e} - \bar{X}_n)^{k_e}$ برای $\sum_{i=1}^{e} k_i = 2p$ است. به‌علاوه نامساوی زیر نیز برقرار است،

$$E\left[\ (Y_{i_1}X_{i_1} - \bar{X}_n)^{k_1} \times \dots \times (Y_{i_e}X_{i_e} - \bar{X}_n)^{k_e}\ |\mathcal{F}\right] \leq E\left[\ (X_{i_1} - \bar{X}_n)^{k_1} \times \dots \times (X_{i_e} - \bar{X}_n)^{k_e}\ |\mathcal{F}\right]$$

از طرفی دیگر برای هر $q \geq 1$ داریم:

$$\prod_{j=1}^{e}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^{kj}\right|\right\} \leq \left\{\max_{1\leq j\leq n}|X_i - \bar{X}_n|\right\}^{2(p-e)} \times V_n^{2e} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right\}^{p-e} \times V_n^{2e}$$

با استفاده از نامساوی بالا و عبارت (2) برای هر $n \geq 2$ و هر $p \geq 1$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} E\left[(S_n - \bar{X}_n)^{2p}|\mathcal{F}\right] &\leq K(p) \times n^{-2p} \sum_{e=1}^{p}[(nV_n^{2e}] \\ &\leq K(p).\, n^{-2p}\left(\sum_{e=1}^{p} n^{p-e} \times n^e\right) \\ &= K(p) \times n^{-2p} \times pn^p \times V_n^{2p} \\ &= K(p) \times n^{-p} \times p \times V_n^{2p} \\ &= Dn^{-p}V_n^{2p} \end{aligned}$$

و بنابراین لم ثابت می‌شود.

اکنون به بیان قضیه اصلی این بخش یعنی قانون قوی اعداد بزرگ برای میانگین موزون تصادفی می‌پردازیم.

قضیه 3. فرض کنید $E|X_i|^{1+\eta}$ برای $i = 1,2,\dots,n$ و برخی مقادیر $\eta \in (0,1)$ متناهی باشد.

آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$P\{sup_{n\geq N}|S_n - \bar{X}_n| > \varepsilon\} \to 0$$

زمانی‌که $N \to \infty$.

اثبات: متغیر تصادفی $W_{n,\eta}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$W_{n,\eta} = 1/n\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu|^{1+\eta},$$

به طوری که $\eta \in (0,1)$. با توجه به تعریف V_n^2 و اینکه $E\left(X_1\right) = \mu < \infty$، داریم:

$$\begin{aligned} V_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \\ &\leq \left\{max_{1\leq j\leq n}|X_i - \mu|^{1-\eta}\right\} \times W_{n,\eta} \\ &\leq \left\{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}_n|^{1-\eta}\right\}^{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \times W_{n,\eta} \\ &= [nW_{n,\eta}]^{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \times \left[W_{n,\eta}\right] \\ &= n^{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \times [nW_{n,\eta}]^{\frac{2}{1+\eta}} \end{aligned}$$

بنابراین به وسیله عبارات بالا و لم 1-3، داریم

$$\begin{aligned} E[(S_n - \bar{X}_n)^{2p}] &\leq Dn^{-p}\left\{[nW_{n,\eta}]^{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \times W_{n,\eta}\right\}^p \\ &= D \times n^{-\frac{2\eta p}{1+\eta}} \times W_{n,\eta}^{\frac{2p}{1+\eta}} \end{aligned}$$

حال پیشامدهای A و B را به ترتیب به صورت تعریف می‌کنیم

$$A = \{sup_{n\geq N}|S_n - \bar{X}_n| > \varepsilon\},$$
$$B = \left\{sup_{n\geq N}W_{n,\eta} \leq h\right\},$$ و

به طوری که h یک مقدار ثابت متناهی و به صورت $\left\{h > E\left|X_1 - \mu\right|^{1+\eta}\right\}$ تعریف می‌شود. توسط

نامساوی بیشینه کولموگروف، فلر[1] (2008)، زمانی که $N \to \infty$ داریم:

$$P(B^c) = P\left\{sup_{n\geq N} W_{n,\eta} - E\left|X_1-\mu\right|^{1+\eta} > h - E\left|X_1-\mu\right|^{1+\eta}\right\} \leq \left\{h - E\left|X_1-\mu\right|^{1+\eta}\right\}^{-1} E\left|W_{n,\eta} - E\left|X_1-\mu\right|^{1+\eta}\right| \to 0,$$

به طوری که $E\left|W_{n,\eta} - E\left|X_1-\mu\right|^{1+\eta}\right| \to 0$ از همگرایی در L_1، $W_{n,\eta}$ نتیجه می‌شود. به علاوه بوسیله نامساوی مارکوف و رابطه (2) نتیجه می‌شود که

$$P(A\cap B) = \sum_{n\geq N} P\{sup_{n\geq N}|S_n - \bar{X}_n| > \varepsilon, W_{n,\eta} \leq h\} \leq \sum_{n\geq N} E[I(W_{n,\eta}\leq h) \times Dn^{-\frac{2\eta p}{1+\eta}} \times W_{n,\eta}^{-\frac{2p}{1+\eta}}] / \varepsilon^{2p} \leq D_0(h,\varepsilon,p)\sum_{n\geq N} n^{-\frac{2\eta p}{1+\eta}} \leq D_1(h,\varepsilon,p)N^{-\frac{2\eta p}{1+\eta}},$$

به طوری که C_0 و C_1 مقادیر ثابت متناهی هستند. p، $(p > 1)$، نیز طوری انتخاب می‌شود که برای برخی مقادیر $h > 0$ داشته باشیم $2\eta p/1+\eta = 1+h$.

در نهایت با توجه به رابطه زیر، فلر(2008)،

$$P(A) \leq P(A\cap B) + P(B^c),$$

همچنین عبارت بالا برای $P(B^c)$ و $P(A\cap B)$ و انتخاب مناسب p قضیه ثابت می‌شود.

قضیه حد مرکزی در برخی حالات خاص

در این بخش قضیه حد مرکزی در قالب 3 مثال بیان می‌شود. در حالت کلی هنوز قضیه حد مرکزی برای میانگین موزون تصادفی اثبات نشده است. تنها سلطانی و روزگار (2012) این قضیه را به صورت شبیه‌سازی برای چندین خانواده از توزیع‌ها بررسی کرده‌اند. مثال‌های زیر با استفاده از قضیه (6-2) آریزمندی و پرز[2] (2010) تبیین و اثبات می‌شود.

مثال 1. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند که از توزیع آرک سینوس با تابع چگالی $f(x) = 1/\left(\pi\sqrt{\sigma^2 - x^2}\right)$، $|x| < \sigma$ تبعیت می‌کنند. طبق نتایج سلطانی و روزگار (2012) میانگین موزون تصادفی از توزیع شبه حلقوی توانی[3] با پارامترهای $\theta = (n-3)/2$ و σ برخوردار است. بنابراین طبق قضیه (6-2) آریزمندی و پرز (1968) عبارت $\sqrt{n+1}\,S_n/\sigma$ در توزیع به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

مثال 4. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند که از توزیع ویگنر روی (2,2-) تبعیت می‌کنند. طبق نتایج سلطانی و روزگار (2012) میانگین موزون تصادفی از توزیع شبه حلقوی توانی با پارامترهای $\theta = n-1$ و $\sigma = 2$ برخوردار است. لذا طبق قضیه (6-2) آریزمندی و پرز (1968) عبارت $\sqrt{(n+1)}S_n$ در توزیع به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

مثال 3. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند که از توزیع شبه حلقوی روی $(-1,1)$ تبعیت می‌کنند. طبق نتایج سلطانی و روزگار(2012) میانگین موزون تصادفی از توزیع شبه حلقوی توانی با پارامترهای $\theta = n-1$ و $\sigma = 1$ برخوردار است. بنابراین طبق قضیه (6-2)

1. Feller

2. Arizmendi and Perez

3. Power Semicircle

آریزمندی و پرز (1968) عبارت $\sqrt{2(n+1)S_n}$ به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای میانگین موزون تصادفی برخی نتایج حدی به‌ویژه قانون ضعیف و قوی اعداد بزرگ و همچنین قضیه حد مرکزی در برخی حالات خاص به دست آمده است. میانگین موزون تصادفی یک جایگزین مناسب برای میانگین نمونه‌ای در برآورد میانگین مجهول جامعه است، بنابراین در تشکیل فاصله اطمینان و آزمون فرضیه یا کاربردهای دیگر به نتایج حدی مناسب برای این متغیر تصادفی نیاز است. از طرفی دیگر پیدا کردن توزیع حدی و همگرایی‌ها موضوع مورد علاقه برخی آماردانان نیز می‌باشد.

References

Arizmendi, O. and Pérez-Abreu, V. (2010). On the non-classical infinite divisibility of power semicircle distributions. Communications on Stochastic Analysis, 4(2), 161-178.

Dempster, A.P. and Kleyle, R.M. (1968). Distributions determined by cutting a simplex with hyperplanes. The Annals of Mathematical Statistics, 1473-1478.

Devroye, L. (1981). Laws of the iterated logarithm for order statistics of uniform spacings. The Annals of Probability, 860-867.

Feller, W. (2008). An introduction to probability theory and its applications (Vol. 2). John Wiley & Sons.

Ferguson, T.S. (1996). A course in large sample theory (Vol. 49). London: Chapman & Hall.

Gao, S., Zhang, J. and Zhou, T. (2003). Law of large numbers for sample mean of random weighting estimate. Information Sciences, 155(1), 151-156.

Johnson, N.L. and Kotz, S. (1990). Randomly weighted averages: Some aspects and extensions. The American Statistician, 44(3), 245-249.

Koul, H.L. (2002). Weighted empirical processes in dynamic nonlinear models (Vol. 166). Springer Science & Business Media.

Liu, Q. (2001). Asymptotic properties and absolute continuity of laws stable by random weighted mean. Stochastic processes and their applications, 95(1), 83-107.

Nadaraya, E.A. (1964). On estimating regression. Theory of Probability & Its Applications, 9(1), 141-142.

Nyrhinen, H. (2001). Finite and infinite time ruin probabilities in a stochastic economic environment. Stochastic Processes and their Applications, 92(2), 265-285.

Pingyan, C. and Shixin, G. (2007). Limiting behavior of weighted sums of iid random variables. Statistics & Probability Letters, 77(16), 1589-1599.

Pruitt, W.E. (1966). Summability of independent random variables (Summability of independent random variables, discussing convergence properties of sequence). Journal of Mathematical and Mechanics, 15, 769-776.

Rohatgi, V.K. (1971). Convergence of weighted sums of independent random variables. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 69, No. 02, pp. 305-307). Cambridge University Press.

Roozegar, R. and Soltani, A.R. (2014). Classes of power semicircle laws that are randomly weighted average distributions. Journal of Statistical Computation and Simulation, 84(12), 2636-2643.

Rosalsky, A. and Sreehari, M. (1998). On the limiting behavior of randomly weighted partial sums. Statistics & probability letters, 40(4), 403-410.

Soltani, A.R. and Roozegar, R. (2012). On distribution of randomly ordered uniform incremental weighted averages: Divided difference approach. Statistics & Probability Letters, 82(5), 1012-1020.

Watson, G.S. (1956). On the joint distribution of the circular serial correlation coefficients. Biometrika, 161-168.

Xiru, C. and Mingzhong, J. (1994). A randomly weighted estimate of the population mean. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 10(3), 274-287.

Yang, Y., Leipus, R. and Šiaulys, J. (2012). Tail probability of randomly weighted sums of subexponential random variables under a dependence structure. Statistics & Probability Letters, 82(9), 1727-1736.