تعمیم مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن و ساختار وابستگی آن

حکیم بکری‌زاده [*1]؛ غلامعلی پرهام [2]؛ نرگس عباسی [3]؛ مریم روزدار [4]

دریافت: 1394/01/28
پذیرش: 1394/03/20

چکیده

با توجه به محدودیت دامنهٔ همبستگی و مدل‌بندی بین متغیرهای وابسته با همبستگی بالا در مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن، در این مقاله، یک تعمیم جدید از مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن برحسب مقاطع چندجمله‌ای در جهت بهبود دامنهٔ همبستگی آن با استفاده از نظریهٔ ماکسیمم پایا معرفی می‌شود. در این تعمیم، برخی از ویژگی‌ها و مفاهیم وابستگی نیز مطالعه می‌شود.

واژگان کلیدی: مفصل، ماکسیمم پایا، مفاهیم وابستگی.

1. استادیار، گروه آمار دانشگاه پیام نور مرکز ایلام (***نویسنده مسئول**) h_bekri@yahoo.com
2. دانشیار، گروه آمار دانشگاه شهید چمران اهواز parham_g@scu.ac.ir
3. دانشیار، گروه آمار دانشگاه پیام نور nargesabba30@yahoo.com
4. دانشجوی کارشناسی ارشد، آمار دانشگاه پیام نور maryam.rozdar@yahoo.com

مقدمه

علوم جدید و تکنولوژی روز در برخورد با مسائل طبیعی به این نتیجه رسیده است که براساس فرض استقلال متغیرها، نمی‌توان بسیاری از پدیده‌ها را تفسیر کرد. بلکه برای تحلیل پدیده‌های مرتبط با عامل‌های وابسته باید ابزارهایی برای اندازه‌گیری وابستگی آنها نیز در نظر گرفته شود. در این راستا، توابع مفصل می‌توانند ساختار وابستگی بین متغیرها را به صورت یک مدل نشان دهند و علاوه بر آن بستری فراهم نمایند که براساس آن بتوان رابطه بین متغیرها را بیان کرد. اسکلار[1] (1959) برای اولین بار در قضیه زیر، از توابع مفصل برای بیان ارتباط توابع توزیع تک‌بعدی با توابع چند متغیره آنها استفاده کرد.

قضیه1. فرض کنید H تابع توزیع توام متغیرهای تصادفی X و Y با توابع توزیع حاشیه‌ای F_X و G_Y باشد. در این صورت تابع مفصلی مانند C وجود دارد به‌طوری‌که برای هر x و y در $\mathfrak{R}$؛

$$H(x,y) = C\big(F_X(x), G_Y(y)\big).$$

قضیه (1) بیان می‌کند که برای هر تابع توزیع F_X و G_Y و تابع مفصل C می‌توان تابع توزیع توام H را با توابع توزیع حاشیه‌ای F_X و G_Y ساخت. از این نظر، قضیه اسکلار زمینه‌ای برای تحقیقات در مورد مفصل‌ها با ساختار وابستگی شد. مفصل‌ها را می‌توان به صورت توابع توزیع چند متغیره‌ای به صورت زیر تعریف کرد که توابع توزیع حاشیه‌ای آنها به صورت یکنواخت در فاصله $[0,1]$ تعریف شده‌اند.

تعریف 1. تابع $C:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ را یک تابع مفصل دوبعدی می‌نامند، هرگاه:

الف) برای هر $s\in[0,1]$ داشته باشیم؛

$$C(s,0) = C(0,s) = 0 \quad \text{و} \quad C(s,1) = C(1,s) = s$$

ب) برای هر $u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,1]$ و اگر $u_1\le u_2$ و $v_1\le v_2$ آنگاه؛

$$\begin{aligned}\Delta(u_1,u_2,v_1,v_2) = {} & C(u_2,v_2)\\ & -C(u_2,v_1)\\ & -C(u_1,v_2)\\ & +C(u_1,v_1)\ge 0\end{aligned}$$

ویژگی (ب) نشان می‌دهد که C تابعی 2- صعودی[2] است و رابطه بالا معادل این است که

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}C(u,v)\ge 0 \quad (1)$$

تعریف 2. یک مفصل C، متقارن[3] است، اگر برای هر مفصل C، $u,v\in[0,1]$ در غیر این صورت $C(u,v) = C(v,u)$ ، نامتقارن[4] است.

تعریف 3. مفصل دومتغیره C را ماکزیمم پایا[5] گوییم، هرگاه به ازای هر عدد صحیح m $(m\ge 1)$ و هر $u,v\in[0,1]^2$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$C(u,v) = C\left(u^{\frac{1}{m}}, v^{\frac{1}{m}}\right)^m \quad (2)$$

از تعریف (3) نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه1. به ازای هر عدد صحیح α,β $(\alpha,\beta\ge 1)$ و هر $(u,v)\in[0,1]^2$، یک مفصل نامتقارن دومتغیره با استفاده از تعریف (3) عبارت است:

$$C(u,v) = C\left(u^{\frac{1}{\alpha}}, v^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha\beta} \quad (3)$$

ساخت مفصل‌ها از روش ماکزیمم پایا در سال 1981 توسط پیکند[6] ارائه شدند. جو[7] (1997) و نلسن[8] (2006) شرح جامعی از توابع مفصل و ویژگی‌های آنها ارائه دادند.

مفصل‌ها توابعی هستند که توابع توزیع چند متغیره را به توابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها پیوند می‌دهند و توزیع‌های حاشیه‌ای را از ساختار وابستگی جدا می‌سازند به همین جهت در مدل‌بندی بین متغیرهای وابسته استفاده می‌شوند. اما محدودیت‌هایی نیز در روش‌های ساخت و مدل‌بندی داده‌ها با استفاده از

---

1. Sklar, A.
2. 2-Increasing
3. Symmetric
4. Asymmetric
5. Invariant maximum
6. Pickands
7. Joe
8. Nelsen

این توابع وجود دارد؛ در برخی از توابع مفصل به دلیل محدود بودن دامنه‌ی همبستگی، امکان مدل بندی بین متغیرهای با همبستگی بالا وجود ندارد. به عنوان نمونه، در مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن که یکی از توابع مفصل پرکاربرد است، دامنهٔ همبستگی محدود به [0/3333,0/3333 -] می‌باشد. همچنین توابع مفصل ساختار وابستگی را به صورت تقارن بیان می‌کنند. ویژگی تقارن در توابع مفصل بیانگر نقش یکسان متغیرها در توزیع توام آن‌ها می‌باشد که این پیش‌شرط، علاوه بر محدود نمودن دامنه‌ی کاربرد توابع مفصل، قادر به توصیف بسیاری از مدل‌ها در فرایندهای طبیعی نمی‌باشد.

یکی از توابع مفصل مهم که توجه زیادی از محققین را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن (FGM)[1] است که توسط فارلی[2] (1960)، گامبل[3] (1960) و مورگنتسرن[4] (1956) معرفی گردید دارای دامنه‌ی همبستگی محدود است، ازاین‌رو، تعمیم‌های از این مفصل توسط محققین معرفی شده است. هوانگ و کوتز[5] (1999)، یک تعمیم از مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن با توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت معرفی کردند که کران بالای همبستگی آن به 0/375 ارتقا یافت و کران پایین آن بدون تغییر، 0/333 ماند. لائی و خی[6] (2000) به بررسی و مطالعه ساختار مفاهیم وابستگی مثبت از یک تعمیم مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن پرداختند. مطالعه جداگانه‌ای روی خانواده فارلی- گامبل- مورگنسترن، در تحلیل ویژگی‌های وابستگی مدل‌ها توسط دروت-ماری و کوتز[7] (2001) صورت گرفته است. بایراموف و کوتز[8] (2002)، با در نظر گرفتن پارامترهای مورد بحث در تعمیم هوانگ و کوتز[9] (1999)، یک تعمیم از مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن با دامنه همبستگی [0/5016 ,0/48 -] معرفی کردند. بکری زاده و همکاران[10] (2012)، در یک تعمیم از مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن نشان دادند که می‌توان دامنه‌ی همبستگی را تا [0/43 ,0/50 -] بهبود داد. رودریگز و فلورس[11] (2004) و کیم[12] و همکاران (2011) کلاسی از مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن را معرفی کردند که در آن به رابطه ضریب همبستگی اسپیرمن با کندال پرداخته شده است. امبلارد و گیرارد[13] (2009) به بررسی کلاسی متقارن از مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن و ویژگی‌های آن پرداخته‌اند. از بنابراین، به نظر می‌رسد توجه کمی به تعمیم نامتقارن از مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن در سال‌های اخیر شده است. تقارن توابع مفصل بیانگر نقش یکسان متغیرها در توزیع توام آنها می‌باشد که این پیش‌شرط، علاوه بر محدود نمودن دامنه‌ی کاربرد توابع مفصل، در توصیف بسیاری از مدل‌ها صادق نمی‌باشد. به عنوان مثال، بررسی داده‌های توسعه‌ی جنگل در طول زمان عدم تقارن را نشان می‌دهد زیرا سرعت رشد درختان خیلی کمتر از سرعت قطع آنها است. با توجه به نقش مهمی که توابع مفصل در شاخه‌های مختلف علوم از جمله بیمه و امور مالی دارند، همچنین بنا به اهمیت آنها در تئوری و کاربرد، روش ساخت این توابع تاکنون مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در این مقاله، یک روش برای ساخت توابع مفصل، یک رویکرد، تعمیم این توابع است. در این راستا، یک تعمیم نامتقارن از مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن

1. Farlie (1960)-Gumbel (1960)-Morgenstern (1956)
2. Farlie, D.G.J.
3. Gumbel, E.J.
4. Morgenstern, D.
5. Huang & Kotz
6. Lai & Xie
7. Drouet-Mari & Kotz
8. Bairamov & Kotz
9. Huang, J.S. & Kotz, S.
10. Bekrizadeh, H.; Parham, G.A. & Zadkarami, M.R.
11. Rodriguez & Flores
12. Kim
13. Amblard & Girard

برحسب مقاطع چندجمله‌ای از درجۀ n و اندازۀ وابستگی آن در جهت بهبود دامنه همبستگی در راستای تحقیقات انجام شده با استفاده از ماکزیمم پایا معرفی می‌شود. این تعمیم، یک تعمیم نامتقارن از مفصل بکری‌زاده و همکاران (2012) می‌باشد. این تعمیم جدید دامنه همبستگی در مفصل فارلی-گامبل- مورگنسترن را بهبود می‌دهد و در مقایسه با تعمیم برخی از تحقیقات انجام شده در این زمینه دارای همبستگی وسیع‌تری است. در این تعمیم نیز، شرایط لازم و کافی برای برقراری برخی از مفاهیم وابستگی به دست می‌آیند.

تعمیم مفصل فارلی- گامبل- مورگنتسرن

یکی از مهم‌ترین توابع مفصل، مفصل فارلی-گامبل- مورگنتسرن (FGM) است که به صورت

$$C(u,v) = uv \in [1+\theta(1-u)(1-v)]$$

معرفی شده است. در مفصل FGM برای $\theta \in [-1,1]$ داریم؛ $\rho = \theta/3 \in [-0.33,0.33]$. بنابراین، در مفصل FGM دامنه‌ی همبستگی محدود است و امکان مدل‌بندی بین متغیرهای وابسته با همبستگی بالا وجود ندارد.

با استفاده از (3)، یک تعمیم نامتقارن از مفصل FGM به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$C^p_{\alpha,\beta}(u,v) = uv\left[1+\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)\right]^p \quad 0<\alpha,\beta\le 1,\ p=0,1,2,\ldots \tag{4}$$

نشان می‌دهیم که تابع (4) یک تابع مفصل دومتغیره است.

اولاً: با استفاده از ویژگی (الف) در تعریف (1)، برای هر $s \in [0,1]$ داریم؛

$$C^p_{\alpha,\beta}(s,0) = C^p_{\alpha,\beta}(0,s) = 0$$

و

$$C^p_{\alpha,\beta}(s,1) = C^p_{\alpha,\beta}(1,s) = s$$

ثانیاً: با استفاده از ویژگی (ب) در تعریف (1)، برای هر $u,v \in [0,1]$ داریم؛

$$\begin{aligned} C^p_{\alpha,\beta}(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial u\partial v} C^p_{\alpha,\beta}(u,v) \\ &= \left[1+\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)\right]^{p-2} \\ &\times \{\left[1+\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)\right]^2 \\ &-\left[1+\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)\right][p\alpha\theta u^\alpha(1-v^\beta) \\ &+p\beta\theta v^\beta(1-u^\alpha)-p\alpha\beta\theta u^\alpha v^\beta] \\ &\alpha\beta\theta^2 p(p-1)u^\alpha(1-u^\alpha)v^\beta(1-v^\beta)\} \end{aligned}$$

(5)

بدیهی است که به ازای $0<\alpha,\beta\le 1, p = 0,1,2,\ldots$، رابطۀ (5)، نامنفی است. به عبارتی؛ $C^p_{\alpha,\beta}(u,v) \ge 0$.

دامنه پارامتر θ با توجه به رابطه (5) و شرط $C^p_{\alpha,\beta}(u,v) \ge 0$، به صورت زیر تعیین می‌شود.

1. اگر در رابطه (5) قرار دهید $u = 1$ و $v = 1$ آنگاه، $\theta \ge -1/\alpha\beta p$.
2. اگر در رابطه (5) قرار دهید $u = 1$ و $v = 0$ آنگاه، $\theta \le 1/\alpha p$.
3. اگر در رابطه (5) قرار دهید $u = 0$ و $v = 1$ آنگاه، $\theta \le 1/\beta p$.
4. اگر در رابطه (5) قرار دهید $u = 0$ و $v = 0$، آنگاه، $\theta \ge -1$.

در نتیجه دامنۀ پارامتر θ در مفصل (6) به فرم

$$M_1 \le \theta \le M_2$$

به دست می‌آید که در آن؛

$$M_1(\alpha,\beta,p) = -\min\left\{1,\frac{1}{\alpha\beta p}\right\}$$

و

$$M_2(\alpha,\beta,p) = max\left\{\frac{1}{\alpha p},\frac{1}{\beta p}\right\}$$

همچنین دقت شود برای $\alpha = \beta$، مفصل $C^p_{\alpha,\beta}$ یک مفصل متقارن است.

نتیجه 1. در مفصل (4) برای $\alpha = \beta = 1$، یک تعمیم دیگری از مفصل FGM به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} C^p_{1,1} &= uv[1+\theta(1-u)(1-v)]^p \\ p &= 0,1,2,\ldots \\ -\min\{1,p^{-1}\} &\le \theta \le p^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

برخی از ویژگی‌های تعمیم

در این بخش، به برخی از ویژگی‌های مفصل تعمیم‌یافته FGM در (4) پرداخته می‌شود.

ویژگی 1. برخی از مفصل‌های معرفی شده در سال‌های اخیر می‌توانند به عنوان زیرخانواده‌هایی از تعمیم $C_{\alpha,\beta}^{p}$ باشند. که در ذیل به برخی از آنها اشاره می‌شود.

1. اگر $p = 0$ باشد، آنگاه تعمیم، منجر به مفصل استقلال می‌شود. یعنی، $C_{\alpha,\beta}^{p}(u,v) = uv$.
2. اگر $\alpha = \beta = p = 1$، آنگاه تعمیم $C_{\alpha,\beta}^{p}$، منجر به مفصل FGM بحث شده توسط فارلی (1960)، گامبل (1960) و مورگنسترن (1956) می‌شود.
3. اگر $\alpha = \beta$ و $p = 1$، آنگاه تعمیم $C_{\alpha,\beta}^{p}$، منجر به مفصل FGM تعمیم‌یافته معرفی شده توسط هوانگ و کوتز (1999) می‌شود.
4. اگر $\alpha = \beta$ ، آنگاه تعمیم $C_{\alpha,\beta}^{p}$، منجر به مفصل FGM تعمیم‌یافته معرفی شده توسط بکری‌زاده و همکاران (2012) می‌شود.

ویژگی 2. برخی از خواص حدی تعمیم $C_{\alpha,\beta}^{p}$ عبارتند از:

1. ویژگی اول

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0} C_{\alpha,\beta}^{p}(u,v) &= \lim_{p\to 0} uv[1+\theta(1-u^{\alpha})(1-v^{\beta})]^{p}\\ &= uv = \Pi(u,v)\\ &\quad \forall u,v \in [0,1]\end{aligned}$$

که در آن $\Pi(u,v)$ تابع مفصل استقلال است.

2. فرض کنید، $\theta = \gamma/p$ که $\gamma \leq p$، آنگاه

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0} C_{\alpha,\beta}^{p}(u,v) &= \lim_{p\to \infty} uv\left[1+\frac{\gamma}{p}(1-u^{\alpha})(1-v^{\beta})\right]^{p}\\ &= uv\exp[\gamma(1-u^{\alpha})(1-v^{\beta})]\\ &\quad C_{\gamma}(u,v)\end{aligned} \qquad (7)$$

تابع مفصل (7)، یک تعمیم جدیدی از مفصل معرفی شده توسط کوادراس[1] (2009) می‌باشد. در مفصل (7) اگر $\alpha = \beta = 1$ باشد، آنگاه مفصل کوادراس (2009) حاصل می‌شود.

1. Cuadras, C.M.

ویژگی 3. یکی از مزیت‌های مدل مفصل $C_{\alpha,\beta}^{p}$، ساخت توزیع‌های دومتغیره تعمیم‌یافته است.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع حاشیه‌ای $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ باشند، آنگاه یک تابع توزیع توام $F_{X,Y}(x,y)$ با استفاده از مفصل $C_{\alpha,\beta}^{p}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x,y) &= F_X(x)F_Y(y)\\ &\quad \left[1+\theta\left(1-F_X^{\alpha}(x)\right)\left(1-F_Y^{\beta}(y)\right)\right]^{p}\\ &\quad M_1 \leq \theta \leq M_2\end{aligned}$$

به عنوان مثال، فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع وایبل با پارامترهای μ و λ باشند. آنگاه با تغییر متغیر $u = 1 - e^{-\lambda x^{\mu}}$ و $v = 1 - e^{-\lambda y^{\mu}}$ و جایگذاری در مفصل $C_{\alpha,\beta}^{p}$، یک توزیع وایبل دومتغیره تعمیم‌یافته به صورت

$$\begin{aligned}H(x,y) &= \left(1-e^{-\lambda x^{\mu}}\right)\left(1-e^{-\lambda y^{\mu}}\right)\\ &\quad \{1+\theta\left[1-\left(1-e^{-\lambda x^{\mu}}\right)^{\alpha}\right]\\ &\quad \left[1-\left(1-e^{-\lambda y^{\mu}}\right)^{\beta}\right]\}^{p}\end{aligned}$$

و $0 < \alpha,\beta \leq 1$ ، $\mu,\lambda > 0$ و $p = 0,1,2,\ldots$ ساخته می‌شود.

اندازهٔ وابستگی

اندازه‌های وابستگی ابزاری مفید برای بیان ساختار وابستگی در حالت دومتغیره هستند. برای مطالعه بیشتر در مورد اندازه‌های وابستگی به جو[2] (1997) و نلسن[3] (2006) مراجعه شود. یکی از ویژگی‌های مفید تابع مفصل این است که اندازه‌های وابستگی را می‌توان برحسب تابع مفصل بیان کرد. در این بخش به یکی از مهم‌ترین اندازهٔ وابستگی یعنی ضریب همبستگی اسپیرمن پرداخته می‌شود و برای تعمیم $C_{\alpha,\beta}^{p}$ این ضریب محاسبه می‌شود.

فرض کنید (X,Y) یک بردار تصادفی با تابع مفصل C باشد. آنگاه، ضریب همبستگی اسپیرمن (ρ_S) برحسب تابع مفصل C به صورت

2. Joe, H.
3. Nelsen, R.B.

$$\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3 \qquad (8)$$

با تابع مفصل C در ارتباط است. از طرفی، $\rho_S = \rho\big(F(X), G(Y)\big)$.

ضریب ρ_S در مفصل FGM برابر $\rho_S = \theta/3$ است که برای $\theta \in [-1,1]$ در فاصله $[-0/33, 0/33]$ قرار می‌گیرد. بنابراین، از مفصل FGM با توجه به محدود بودن دامنهٔ همبستگی آن امکان مدل‌بندی بین متغیرهای تصادفی با وابستگی بالا در علوم مختلف وجود ندارد. در قضیه زیر نشان داده می‌شود که با در نظر گرفتن مفصل $C_{\alpha,\beta}^p$ می‌توان دامنه همبستگی بین متغیرهای تصادفی در مفصل FGM را بهبود داد و در مدل‌بندی بین داده‌ها از آن استفاده کرد.

قضیه 2. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با مفصل متناظر $C_{\alpha,\beta}^p$ و $0 < \alpha,\beta \le 1$ و $p = 0,1,2,\ldots$ باشند. آنگاه،

$$\rho_s = \frac{12}{\alpha\beta}\sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r\left[\beta\left(\frac{2}{\alpha}, r+1\right)\right]^{-1}\left[\beta\left(\frac{2}{\alpha}, r+1\right)\right]^{-1} \qquad (9)$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

که در آن برای $M_1 \le \theta \le M_2$، داریم؛ $\rho_S \in [-0/3667, 0/6815]$.

اثبات. برای $p = 0,1,2,\ldots$، بسط دوجمله‌ای نیوتن مفصل $C_{\alpha,\beta}^p$ به صورت زیر است،

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}^p(u,v) &= uv\sum_{r=0}^p \binom{p}{r}\{\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)\}^r \\ &= uv + \sum_{r=0}^p \binom{p}{r}\theta^r u(1-u^\alpha)^r v(1-v^\beta)^r \end{aligned}$$

(10)

با جایگذاری رابطه (10) در رابطه (8) داریم:

$$\begin{aligned} \rho_s &= 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3 \\ &= 12\int_0^1\int_0^1\{uv \\ &\quad + \sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r u(1-u^\alpha)^r v(1-v^\beta)^r\}dudv - 3 \\ &= 12\{\int_0^1\int_0^1 uvdudv \\ &\quad + \int_0^1\int_0^1\sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r u(1-u^\alpha)^r v(1-v^\beta)^r dudv\} \\ &\quad -3 \\ &= 12\sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r\int_0^1\int_0^1 u(1-u^\alpha)^r v(1-v^\beta)^r dudv \\ &= 12\sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r\left\{\int_0^1 u(1-u^\alpha)^r du\right\} \\ &\quad \left\{\int_0^1 v(1-v^\beta)^r dv\right\} \\ &= \frac{12}{\alpha\beta}\sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r\frac{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma\left(r+1+\frac{2}{\alpha}\right)\Gamma\left(r+1+\frac{2}{\beta}\right)} \\ &= \frac{12}{\alpha\beta}\sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r\left[B\left(\frac{2}{\alpha}, r+1\right)\right]^{-1}\left[B\left(\frac{2}{\beta}, r+1\right)\right]^{-1} \end{aligned}$$

به ازای مقادیر مختلف α,β و p نشان داده می‌شود که برای $\alpha = 0/001$، $\beta = 1$ و $p \ge 1000$، $\rho_{S,\max} \cong 0/6815$، و به ازای $\alpha = 0/5$، $\beta = 1$ و $p = 2$، $\rho_{S,\min} \cong -0/3667$، به‌دست آمده است. در نتیجه دامنهٔ ρ_S از تعمیم $C_{\alpha,\beta}^p$ به صورت: $\rho_S \in [-0/3667, 0/6815]$ است. در نتیجه، دامنهٔ تغییر مثبت ρ_S از تعمیم $C_{\alpha,\beta}^p$ در مقایسه با دامنهٔ ρ_S مفصل FGM و تعمیم‌های هوانگ و کوتز (1999)، بایراموف و کوتز[1] (2002) و بکری‌زاده و همکاران (2012) بیشتر است.

نتیجه 2. با استفاده از (9) در مفصل (6) داریم؛

$$\rho_S = 12\sum_{r=1}^p \binom{p}{r}\theta^r\left[\frac{1}{(r+1)(r+2)}\right]^2 \qquad (11)$$

کران بالای ρ_S در (11)، هنگامی‌که $p \to \infty$، حدوداً 0/3805 است. اما کران پایین ρ_S بدون تغییر، 0/3333 است. از این‌رو، دامنه همبستگی ρ_S در مفصل تعمیم‌یافته FGM در (6) برابر با $[-0/3333, 0/3805]$ است که نسبت به مفصل FGM دارای دامنهٔ همبستگی ρ_S وسیع‌تری است.

مفاهیم وابستگی

ساختار مفاهیم وابستگی متغیرها را می‌توان برحسب تابع مفصل بیان نمود و با توجه به این‌که کار کردن با توابع مفصل راحت‌تر است، بسیاری از محققان به این حوزه وارد شده و مفاهیم مورد تحقیق خود را به کمک تابع مفصل ارائه داده‌اند. به عنوان نمونه، تانگ[2] (1980) و هاتچینسون و لای[3] (1990) ویژگی‌های وابستگی بین متغیرها را برحسب تابع مفصل به‌طور کامل مورد بحث و بررسی قرار دادند. در این بخش، مفاهیمی از وابستگی مثبت را برحسب تابع مفصل مورد مطالعه و در مفصل (4) بررسی می‌شوند.

1. Bairamov, I. & Kotz, S
2. Tong, Y.L.
3. Hutchinson, TP. & Lai, C.D.

تعریف 3. فرض کنید C مفصل مربوط به متغیرهای X و Y باشد، آنگاه؛

الف) X و Y وابسته مربعی منفی[1] (NQD) هستند اگر و تنها اگر $C(u,v) \leq uv$.

ب) متغیر تصادفی Y در دم چپ نسبت به X صعودی[2] $\left(RTI(Y|X)\right)$ است اگر و تنها اگر برای هر مقدار $0 \leq v \leq 1$، تابع $C(u,v)/u$ نسبت به u غیرنزولی باشد.

پ) متغیرهای X و Y به طور منظم وارون از مرتبه2[3] (RR_2) نامند اگر برای تمام مقادیر $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ که $u_1 < u_2$ و $v_1 < v_2$،

$$C(u_1,v_1)C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2)C(u_2,v_1) \leq 0$$

ت) متغیرهای تصادفی X و Y در گوشه چپ صعودی[4]، $LCSI$ هستند اگر و تنها اگر C به‌طور منظم وارون از مرتبه دو (RR_2) باشد.

ث) متغیرهای تصادفی X و Y در گوشه راست نزولی[5]، $RCSD$ هستند اگر و تنها اگر $\bar{C}$ به طور منظم وارون از مرتبه دو (RR_2) باشد.

در قضیه زیر، برخی مفاهیم وابستگی در مفصل $C^p_{\alpha,\beta}$ بررسی می‌شود.

قضیه3. فرض کنید (X,Y) یک زوج متغیر تصادفی با مفصل متناظر $C^p_{\alpha,\beta}$ باشند. آنگاه،

الف) متغیرهای تصادفی X و Y دارای ویژگی NQD هستند اگر و تنها اگر $M_1(\alpha,\beta,p) \leq \theta \leq 0$.

ب) متغیرهای تصادفی X و Y دارای ویژگی RTI هستند اگر و تنها اگر $M_1(\alpha,\beta,p) \leq \theta \leq 0$.

پ) متغیرهای تصادفی X و Y دارای ویژگی RR_2 هستند اگر و تنها اگر $M_1(\alpha,\beta,p) \leq \theta \leq 0$.

ت) ویژگی $LCSI$ هستند اگر و تنها اگر ویژگی RR_2 برقرار باشد.

ث) ویژگی $RCSD$ هستند اگر و تنها اگر ویژگی RR_2 برقرار باشد.

اثبات.

الف) با استفاده از تعریف (3، الف)، بایستی

$$C^p_{\alpha,\beta}(u,v) \leq uv$$

برقرار باشد. بنابراین برای $0 < \alpha,\beta \leq 1$ داریم؛

$$\begin{aligned} &[1+\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)]^p \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \theta \leq 0 \end{aligned}$$

از آنجا که کران پایین پارامتر θ، $M_1(\alpha,\beta,p)$ می‌باشد نتیجه می‌شود که تابع مفصل (4)، (NQD) است اگر و فقط اگر $M_1(\alpha,\beta,p) \leq \theta \leq 0$ باشد.

ب) با استفاده از تعریف (3، ب)، بایستی تابع

$$\left(C^p_{\alpha,\beta}(u,v)\right)/u = v[1+\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)]^p$$

برای هر مقدار $0 \leq v \leq 1$، نسبت به u غیر صعودی باشد. ازاین‌رو،

$$-\alpha p\theta u^{\alpha-1}v(1-v^\beta)$$
$$[1+\theta(1-u^\alpha)(1-v^\beta)]^{p-1} \geq 0$$

مشابه اثبات (الف)، نامساوی بالا برقرار است اگر و فقط اگر $M_1(\alpha,\beta,p) \leq \theta \leq 0$.

پ) با استفاده از تعریف (3، پ) بایستی

$$\begin{aligned} Z = &C^p_{\alpha,\beta}(u_1,v_1)C^p_{\alpha,\beta}(u_2,v_2) \\ &-C^p_{\alpha,\beta}(u_1,v_2)C^p_{\alpha,\beta}(u_2,v_1) \leq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

با ساده کردن رابطهٔ (12) داریم؛

$$\theta[u_2^\alpha - u_1^\alpha]\left[v_2^\beta - v_1^\beta\right] \leq 0 \qquad (13)$$

با فرض $u_1 < u_2$ و $v_1 < v_2$. آنگاه رابطه (13) برقرار است اگر و تنها اگر $M_1(\alpha,\beta,p) \leq \theta \leq 0$.

ت و ث) طبق (پ) و استفاده از تعریف 3 (ت و ث) ویژگی‌های $LCSI$ و $RCSD$ برقرار می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر، تعمیم‌های متقارنی از مفصل فارلی- گامبل- مورگنسترن در جهت بهبود دامنهٔ همبستگی آن ارائه شده است و توجه کمی به تعمیم نامتقارن از این مفصل شده است. ویژگی تقارن در

---

1. Positively Quadrant Dependent
2. Left Tail Increasing
3. Reverse regular of order 2
4. Left Corner Set Increasing
5. Right Corner Set Decreasing

توابع مفصل بیانگر نقش یکسان متغیرها در توزیع توام آنها می‌باشد که این پیش‌شرط، علاوه بر محدود نمودن دامنهٔ کاربرد توابع مفصل، در توصیف بسیاری از مدل‌ها صادق نمی‌باشد. ازاین‌رو، در این مقاله، با توجه به محدودیت دامنهٔ همبستگی و ویژگی تقارن در مفصل FGM یک تعمیم نامتقارن از آن برحسب مقاطع چندجمله‌ای از درجهٔ n در جهت بهبود دامنه همبستگی در راستای تحقیقات با استفاده از ماکزیمم پایا معرفی گردید. این تعمیم نشان داد که تحت شرایطی خاص، دارای دامنهٔ همبستگی $\rho_S \in [-0/3667,0/6815]$ می‌باشد که به طور قابل ملاحظه‌ای دامنهٔ همبستگی را در مفصل FGM بهبود می‌بخشد. بنابراین در مدل‌بندی بین داده‌ها می‌توان از این تعمیم در علوم مختلف استفاده نمود. همچنین، دامنهٔ همبستگی مثبت در مفصل تعمیم‌یافتهٔ FGM، در مقایسه با دامنهٔ همبستگی به دست آمده از تعمیم‌های هانگ و کوتز (1999) و بایراموف و کوتز (2002) و بکری‌زاده و همکاران (2012) وسیع‌تر است. از ویژگی‌های دیگر این تعمیم، ساخت توابع توزیع دومتغیرهٔ تعمیم‌یافته می‌باشد. به علاوه، یکی از خواص حدی این تعمیم منجر به تعمیم مفصل کوادراس (2009) می‌شود. برای این تعمیم از مفصل‌ها، برخی از مفاهیم وابستگی مورد مطالعه قرار گرفتند.

References

Amblard, C. and Girard, S. (2009). A new extension of bivariate FGM copulas. Metrika 70: 1-17.

Bairamov, I. and Kotz, S. (2002). Dependence structure and symmetry of Huang-Kotz FGM distributions and their extension. Metrika 56: 55–72.

Bekrizadeh, H.; Parham, G.A. & Zadkarami, M.R. (2012). The New Generalization of Farlie Gumbel Morgenstern Copulas. Applied Math-ematical Sciences, 6(71): 3527-3533.

Cuadras, C.M. (2009). Constructing copula functiona with weighted geometric means. Journal of Statistical Planning and Inference 139: 3766-3772.

Drouet-Mari, D. & Kotz, S. (2001). Correlation and dependence. Imperial College Press: London.

Farlie, D.G.J. (1960). The performance of some correlation coefficients for a general distribution bivariate. Biom-etrika 47: 307–323.

Gumbel, E.J. (1960). Bivariate Exponential distributions. Journal of American Statistical Associated 55: 698–707.

Huang, J.S. and Kotz, S. (1999). Modifications of the Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions, A tough hill to climb. Metrika 49: 135–145.

Hutchinson, TP. and Lai, C.D. (1990). Continuous Bivariate Distributions. Emphasising Applications, Rumsby Scientific Publishing: Adelaide.

Joe, H. (1997). Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman and Hall: London.

Kim, J.M.; Sungur, E.A.; Choi, T. and Heo, T.Y. (2011). Generalized bivariate copulas and their properties, IOS Press. Model Assisted Statistics and Application 6:127-136.

Lai, C.D. and Xie, M. (2000). A new family of positive quadrant dependent bivariate distributions, Statistics and Probability Letters, 46, 359-364.

Morgenstern, D. (1956). Einfache Beispielezwei dimensionaler Verteilungen. Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik 8: 234–235.

Nelsen, R.B. (2006). An introduction to copulas. Springer Series in Statistics, Springer, New York: second edition.

Pickands, J. (1981). Multivariate extreme value distributions. Bulton Institute Statistical 49: 859-878.

Rodríguez-Lallena, J.A. and Úbeda-Flores, M. (2004). A new class of bivariate copulas. Statistics and Probability Letters 9(5): 315–325.

Sklar, A. (1959). Fonctions deréparti-tionàn dimensions etleursmarges. Publish Institute Statistical University Paris, 8: 229–231.

Tong, Y.L. (1980). Probability Inequalities in Multivariate Distributions. Academic Press: New York.