توزیع آمارهٔ آزمون فرضیه مرکب با محدودیت فضای پارامتری در توزیع چندمتغیره پیوسته

ابوذر بازیاری[1]

دریافت: 1393/02/16
پذیرش: 1394/02/29

چکیده

در این مقاله، آزمون فرضیه صفر بودن ترکیب خطی بردار پارامتر $p-$ بعدی در ارتباط با یک ماتریس معلوم $r \times p$ بعدی و دارای رتبه کامل در مقابل فرضیه یک‌طرفه ترکیب خطی بردار پارامتر برای یک توزیع چندمتغیره پیوسته در نظر گرفته شده است. با استفاده از روش نسبت درستنمایی، فرم کلی آمارهٔ آزمون محاسبه و با توجه به قضایای حدی، توزیع مجانبی آماره آزمون تحت فرضیه صفر برحسب توزیع کی‌دو به‌دست آمده و مقادیر بحرانی آمارهٔ آزمون برای سطوح معنی‌داری محاسبه و توان آزمون با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برآورد شده است. مثال‌های عددی در ارتباط با مسئله آزمون ارایه شده است. تمام نتایج حاصل از این مقاله برای وقتی است که متغیرهای تصادفی از هم مستقل و هم‌توزیع باشند. همچنین نتایج به‌دست آمده برای توزیع یک متغیره پیوسته نیز برقرار هستند.

واژگان کلیدی: آزمون نسبت درستنمایی، توزیع چندمتغیره پیوسته، توزیع مجانبی، مخروط محدب بسته.

1. استادیار، گروه آمار دانشگاه خلیج فارس ab_bazyari@yahoo.com

مقدمه

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌های تصادفی و مستقل دارای تابع چگالی $p-$ متغیره مشترک $f(X;\theta)$، که در آن $\theta \in \Theta \subset \Re^P$ بردار پارامتر $P \times 1$، Θ نشان‌دهنده فضای پارامتر و $\Re^P$ فضای اقلیدسی[1] $p-$ بعدی و نیز R یک ماتریس معلوم $r \times P$ با رتبه کامل باشد. در این مقاله آزمون فرضیه H_0 در مقابل H_1 به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} H_0&: R\theta = 0 \\ H_1&: R\theta \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

(با حداقل یک نامساوی اکید در فرضیه H_1)، لازم به ذکر است که $R\theta$ یک بردار $r \times 1$ و فرضیه H_1 بیانگر این است که r تا عنصر بردار $R\theta$ همگی غیرمنفی‌اند.

برآورد پارامتر جامعه تحت یک محدودیت در استنباط آماری از اهمیت بسزایی برخوردار است، هرگاه توزیع آماری مورد نظر توزیعی $p-$ متغیره با بردار میانگین $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_P)'$ باشد، امکان دارد به‌عنوان مثال محدودیت مرتب شده به‌صورت $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_P$ (با حداقل یک نامساوی اکید) بین مولفه‌های بردار میانگین جامعه برقرار باشد. در این صورت تعیین برآورد مولفه‌های بردار میانگین تحت قیدهای معین شده و در نتیجه یافتن توزیع آماری آن برآورد بسیار مهم خواهد بود. چنین محدودیت‌هایی امکان دارد در یک آزمون فرضیه آماری مورد بررسی قرار بگیرد. اولین بار بارتولومو[2] (1959a)، آزمون تساوی k میانگین جامعه نرمال یک متغیره را در مقابل میانگین‌های مرتب شده انجام داد. بارتولومو (1959a)، برای این فرضیه‌ها آماره آزمون نسبت درستنمایی، $\bar{\chi}_k^2$، را با فرض معلوم بودن واریانس‌ها به‌دست آورد. بارتولومو (1959a)، آماره آزمون نسبت درستنمایی، $\bar{F}$، را با فرض مجهول بودن واریانس‌ها محاسبه کرد. در حقیقت روش مورد استفاده برای برآورد پارامترهای مرتب شده، الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس[3] بود. بارتولومو[4] (1959b)، این مسئله آزمون را برای حالت دوطرفه مورد بررسی قرار داد، آماره آزمونی را پیشنهاد و تقریبی برای توزیع آماره در حالت $k = 5$ به‌دست آورد. در گسترش این کار در چندمتغیره، کودو[5] (1963)، یک جامعه نرمال p متغیره را با میانگین مجهول μ و ماتریس واریانس کوواریانس معلوم Σ در نظر گرفت و آماره آزمون بر اساس روش نسبت درستنمایی برای آزمون فرضیه

$$H_0': \mu = 0 \ \ (i = 1, \ldots, p)$$

در مقابل فرضیه

$$H_1': \mu_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, p), \qquad \max_{1 \leq i \leq p} \mu_i > 0,$$

به‌دست آورد. پرلمن[6] (1969)، این آزمون را با ماتریس واریانس کوواریانس کاملاً مجهول بر اساس روش نسبت درستنمایی مورد بررسی قرار داد و توزیع دقیق آماره را تحت فرضیه اولیه محاسبه کرد. کودو و چوی[7] (1975)، این مسئله آزمون را با فرض ویژه بودن ماتریس واریانس کوواریانس در نظر گرفته و آماره آزمون را با روش نسبت درستنمایی محاسبه کردند. گوریروکس و همکاران[8] (1982)، این نوع آزمون‌ها را در مدل رگرسیون خطی $Y = X\beta + \varepsilon$ با محدودیت روی ضرایب برای آزمون فرضیه $R\beta = r$ در مقابل فرضیه دوطرفه $R\beta \neq r$ با حداقل یک نامساوی اکید، که R یک ماتریس معلوم و با رتبه کامل است در نظر گرفتند. با محاسبه آمارهٔ آزمون

1. Euclidean Space
2. Bartholomew, D.J.
3. Pool Adjacent Violators Algorithm
4. Bartholomew, D.J
5. Kudo, A.
6. Perlman, M.D.
7. Kudo, A. and Choi, J.R.
8. Gourieroux, C., Holly, A. and Monfort, A.

نشان دادند که توزیع تحت فرضیه صفر این آماره ترکیبی از توزیع‌های کی‌دو است. گوریروکس و همکاران (1982)، این نوع آزمون‌ها را در مدل رگرسیون خطی $Y = X\beta + \varepsilon$ با محدودیت روی ضرایب برای آزمون فرضیه $R\beta = r$ در مقابل فرضیه دوطرفه $R\beta \neq r$ با حداقل یک نامساوی اکید، که R یک ماتریس معلوم و با رتبه کامل است در نظر گرفتند. با محاسبه آماره آزمون نشان دادند که توزیع تحت فرضیه صفر این آماره ترکیبی از توزیع‌های کی‌دو است. ساسابوچی و کولاتونگا[1] (1985)، تقریب‌هایی را برای توزیع آماره $\bar{F}$ تحت فرضیه صفر پیشنهاد و با مقایسه‌های عددی نشان دادند که این تقریب‌ها نتایج بهتری را ارائه می‌دهند. شاپیرو[2] (1985)، آماره آزمون را برای چند حالت مختلف محدودیت روی بردار پارامتر میانگین در توزیع نرمال چند متغیره بر اساس مخروط‌های محدب بسته به دست آورد. شاپیرو (1988)، آماره آزمون را برای چند حالت مختلف محدودیت روی بردار پارامتر میانگین در توزیع نرمال چند متغیره بر اساس مخروط‌های محدب بسته به دست آورد. رابرتسون و همکارن[3] (1988)، به بحث و بررسی آزمون‌های با محدودیت‌های مرتب شده روی میانگین‌ها برای توزیع‌های نرمال یک متغیره و چند متغیره برای حالات معلوم و مجهول بودن واریانس‌ها و نیز ماتریس‌های واریانس کواریانس پرداختند. تانگ و همکاران[4] (1989)، آماره آزمون جدیدی را برای مسئله کودو (1963) با ماتریس واریانس کواریانس معلوم پیشنهاد و توزیع آن را تحت فرضیه اولیه محاسبه کردند. نتایج بیشتر روی چنین آزمون‌هایی توسط بازارا و همکاران[5] (1993)، سیل‌واپول (1996) و سیل‌واپول و سن[6] (2005) صورت گرفته است. سیل‌واپول و سن (2005)، آزمون فرضیه

$$H_0: R\theta = 0$$
$$H_1: R\theta \geq 0$$

با حداقل یک نامساوی اکید در فرضیه H_1، که R یک ماتریس معلوم $r \times p$ و دارای رتبه کامل است، در توزیع نرمال چند متغیره مورد بررسی قرار دادند. آماره آزمون با روش نسبت درستنمایی محاسبه و توزیع تحت فرضیه صفر این آماره را به‌دست آوردند. همچنین سن و سینجر[7] (1993) و سیل‌واپول و سن (2005)، آزمون فرضیه

$$H_0: R\theta = 0$$
$$H_1'': R\theta \neq 0,$$

با حداقل یک نامساوی اکید در فرضیه دوطرفه H_1''، را برای توزیع نرمال چند متغیره مورد بررسی قرار دادند. بازیاری و همکاران[8] (1390)، آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های k جامعه نرمال چند متغیره در مقابل فرضیه یک‌طرفه میانگین‌های مرتب شده برای حالاتی که ماتریس‌های واریانس کواریانس معلوم و مجهول باشند را در نظر گرفتند. برای حالت معلوم و قطری بودن ماتریس‌های واریانس کواریانس آماره آزمون را محاسبه و توزیع تحت فرضیه صفر آن را به دست آوردند. برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کواریانس مجهول و برابر باشند، با استفاده از تصاویر متعامد بردارها روی مخروط‌های محدب دنباله‌ای از آزمون‌ها را جهت یافتن مقادیر احتمال ارائه دادند.

بازیاری و چینی‌پرداز[9] (2012)، آزمون فرضیه مرتب شده بردارهای میانگین جامعه‌های نرمال چند متغیره در مقابل این فرضیه که هیچ محدودیتی روی

1. Sasabuchi, S. and Kulatunga, D. D.
2. Shapiro, A.
3. Robertson, T., Wright, F.T. & Dykstra, R.L.
4. Tang, D.I., Gnecco, C. & Geller, N.
5. Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. & Shetty. C.M.
6. Silvapulle, M.J. & Sen, P.K.
7. Sen, P.K. & Singer, J.M.
8. Bazyari, A. & Pesarin, F.
9. Bazyari, A. & Chinipardaz, R.

بردارهای میانگین نباشد، برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس کاملاً مجهول اما برابر باشند را مورد مطالعه قرار دادند. با روش نسبت درستنمایی آماره آزمون را بر اساس تصاویر متعامد روی مخروط‌های محدب محاسبه، توزیع تحت فرضیه صفر آماره را تعیین و مقادیر بحرانی آن را با روش شبیه‌سازی مونت کارلو برآورد کردند. بازیاری و چینی‌پرداز (2013)، ضمن در نظر گرفتن این آزمون فرضیه با توجه به مشکل بودن محاسبه دقیق مقادیر احتمال برای آماره آزمون، توانستند کران بالا برای مقادیر احتمال به دست آورند. بازیاری و پسرین (2013)، آزمون فرضیه تساوی بردارهای میانگین k جامعه نرمال چندمتغیره در مقابل فرضیه دوطرفه میانگین‌های مرتب شده برای حالاتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس معلوم و مجهول باشند را در نظر گرفتند. آماره آزمون را محاسبه و توزیع تحت فرضیه صفر آن را همراه با مقادیر بحرانی برای حالت قطری بودن ماتریس‌های واریانس کوواریانس به دست آوردند. بازیاری (1394)، آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های k جامعه نرمال یک متغیره در مقابل فرضیه یک‌طرفه میانگین‌های مرتب شده با واریانس‌های مجهول و برابر را مورد بررسی قرار داد. پرتوان‌ترین آزمون در سطح معنی‌داری α ارائه و مقادیر بحرانی آزمون و توان آن محاسبه شد. همچنین آزمون فرضیه تساوی بردارهای میانگین در مقابل فرضیه دوطرفه میانگین‌های مرتب شده برای دو توزیع نرمال چند متغیره در نظر گرفته و با روش شبیه‌سازی مونت کارلو توان آزمون بازیاری و پسرین (3013) با آزمون کلاسیک مقایسه شده است.

در این مقاله، مسئله آزمون فرضیه (1) برای یک توزیع $p-$ متغیره پیوسته در حالت کلی مورد بررسی قرار گرفته است. فرم کلی آماره آزمون با روش نسبت درستنمایی محاسبه و با استفاده از قضایای حدی، توزیع مجانبی آماره آزمون محاسبه شده است. در بخش دوم این مقاله، به معرفی تعاریف و ارائه قضیه‌ای از استنباط آماری پرداخته شده است. در بخش سوم مقاله، ضمن محاسبه فرم کلی آماره آزمون نسبت درستنمایی، توزیع مجانبی این آماره تحت فرضیه صفر به‌دست آمده و مقادیر بحرانی آماره آزمون برای سطوح مختلف معنی‌داری محاسبه و توان آزمون با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برآورد شده است. در بخش چهارم مقاله، مثال‌های عددی در ارتباط برای مسئله آزمون (1) ارائه شده است. بحث و نتیجه‌گیری در بخش 5 داده شده است. تمام محاسبات عددی با استفاده از نرم‌افزار $SPLUS$ انجام گرفته است.

نتایجی از استنباط آماری

تعریف 1: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع دارای تابع چگالی $p-$ متغیره مشترک $f(X;\theta)$ باشند. در این صورت توابع $l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} log f(X_i;\theta)$، $S(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta)$ و $I(\theta) = E_\theta\{(\partial/\partial\theta \, log f(X;\theta))(\partial/(\partial\theta') log f(X;\theta))\}$

به ترتیب تابع درستنمایی، تابع علامت و ماتریس اطلاع فیشر برای پارامتر θ است.

تعریف 2: فرض کنید $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ و $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ بردارهای p-بعدی در فضای اقلیدسی $\mathfrak{R}^P$ باشند. برای هر ماتریس $p \times p$ معین مثبت Λ، ضرب داخلی در فضای اقلیدسی $\mathfrak{R}^{Pk}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle X, Y\rangle_\Lambda = \sum_{i=1}^{k} n_i X_i' \Lambda^{-1} y_i = (X_1', X_2', \dots, X_k') \begin{bmatrix} n_1\Lambda^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k\Lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

همچنین نرم $\|.\|_\Lambda$ در فضای اقلیدسی $\Re^{Pk}$ عبارت است از $\|X\|_\Lambda = \langle X, X\rangle_\Lambda^{\frac{1}{2}}$

تعریف 3: فرض کنید C یک زیرمجموعه غیر تهی در فضای اقلیدسی باشد. C را یک مخروط محدب گویند اگر برای $x, y \in C$ و $\lambda \geq 0$, $\gamma \geq 0$ آنگاه $\lambda x + \gamma y \in C$. همچنین C را یک مخروط محدب بسته گویند اگر اولاً مخروطی محدب بوده و ثانیاً یک مجموعه بسته[1] باشد.

قضیه 1: فرض کنید شرایط گفته شده در تعریف (1) برقرار بوده و θ مقدار واقعی بردار پارامتر θ باشد و $O_P(h)$ نمادی برای نشان دادن تابعی $p-$ متغیره از h که سریع‌تر از h به صفر میل کند یعنی $\lim_{h\to 0} O(h)/h = 0$، آنگاه روابط زیر برقرار هستند:

الف) $n^{-1/2}S(\theta_0) \xrightarrow{d} N\{0, I(\theta_0)\}$

ب) $n^{-1/2}I(\theta_0)^{-1}S(\theta_0) = n^{1/2}(\hat{\theta} - \theta_0) + O_P(1)$

ج) $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} N\{0, I(\theta_0)^{-1}\}$

(برای اثبات این قضیه به کاکس و هینکلی[2]، 1974 و سن و سینجر، 1993 رجوع شود.)

آزمون فرضیه آماری مرکب با محدودیت روی فضای بردار پارامتر

در این بخش، ضمن محاسبه فرم کلی آماره آزمون نسبت درستنمایی برای مسئله آزمون (1)، توزیع مجانبی این آماره تحت فرضیه صفر محاسبه شده است. فرض کنید $l(\theta)$ تابع درستنمایی مسئله آزمون (1) باشد. در این صورت با توجه به رابطه $\lambda = \sup_{H_0} l(\theta) / \sup_{H_1} l(\theta)$، به‌راحتی دیده می‌شود که آماره آزمون نسبت درستنمایی عبارت است از:

$$\chi^2 = -2ln\lambda = 2 [\sup\{l(\theta); R\theta \geq 0\} - \sup\{l(\theta); R\theta = 0\}] \quad (2)$$

قضیه 2: فرض کنید شرایط گفته شده در تعریف (1) برقرار بوده و $t = n^{1/2}(\theta - \theta_0)$ و $G_n = n^{1/2}I_{\theta_0}S(\theta_0)$ باشد. آنگاه برای هر $S > 0$، آماره آزمون به‌دست آمده در رابطه (2) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$l(\theta)=l(\theta_0) + \left(\frac{1}{2}\right) n^{-1}S(\theta_0)' I_{\theta_0}^{-1} S(\theta_0) - \left(\frac{1}{2}\right)(G_n - t)' I_{\theta_0}(G_n - t) + k_n(t)$$

که در آن $k_n(t) = n^{-1/2}\|t\|^3 O_P(1)$ و $\sup_{\|t\|<s}|k_n(t)| = O_P$

(برای دیدن اثبات این قضیه به سلف و لیانگ، 1987 رجوع شود.)

قضیه 3: فرض کنید بردار تصادفی X دارای توزیع نرمال $p-$ متغیره $N_P(\theta, \Sigma)$، با ماتریس معین مثبت Σ باشد. اگر R یک ماتریس $r \times p$ با رتبه کامل و R_1 یک زیر ماتریس $q \times q$ باشد. آنگاه توزیع آماره آزمون LRT برای آزمون فرضیه‌های

$$H_0: R\theta = 0$$
$$H_1: R_1\theta \geq 0$$

با حداقل یک نامساوی اکید در H_1، تحت فرضیه صفر برای هر مقدار $c > 0$، عبارت است از:

$$P_{H_0}(LRT \leq c) = \sum_{k=0}^{q} w_k(q, R_1\Sigma R_1')P(\chi^2_{r-q+k} \leq c).$$

(برای دیدن اثبات به شاپیرو، 1988 و سیل‌واپول[3]، 1996 رجوع شود.)

حال با توجه به قضایای گفته شده، قضیه اصلی مقاله در ارتباط با توزیع مجانبی آماره آزمون به‌دست آمده در رابطه (2) به‌صورت زیر بیان می‌شود.

1. Close Set
2. Cox, D.R. & Hinkley, D.V.
3. Silvapulle, M.J.

قضیه 4: فرض کنید $X_n,\dots,X_2,X_1$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع دارای تابع چگالی $p-$ متغیره مشترک $f(\mathrm{x};\theta)$ و نیز شرایط گفته شده در تعریف (1) برقرار باشد. اگر θ_0 مقدار واقعی بردار پارامتر θ در فرضیه H_0 باشد. آنگاه

الف)

$$l(\theta)=\min_{R\theta}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)-\min_{R\theta\geq 0}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)+O_P(1)$$

ب) برای هر مقدار $c>0$ و $s\geq 0$، توزیع مجانبی آماره آزمون تحت فرضیه صفر عبارت است از:

$$\lim_{n\to\infty}P_\theta(\chi^2\geq c)=\sum_{k=0}^{s}w_k\left(s,R\mathrm{I}_\theta^{-1}R'\right)P\left(\chi_k^2\geq c\right). \quad (3)$$

که در آن $w_k\left(s,R\mathrm{I}_\theta^{-1}R'\right)$، $k=0,1,\dots,s$، ضرایب غیر منفی در ارتباط با احتمالات توزیع کی‌دو بوده و آنها را در اصطلاح وزن‌های احتمال می‌گوییم و $\sum_{k=0}^{s}w_k\left(s,R\mathrm{I}_\theta^{-1}R'\right)=1$ می‌باشد.

اثبات: با توجه به اینکه $t=n^{1/2}(\theta-\theta_0)$ و نیز تحت H_0، همواره $R\theta_0=0$ است، بنابراین $R\theta=0$ است اگر و فقط اگر $Rt=0$ و نیز $R\theta\geq 0$ است اگر و فقط اگر $Rt\geq 0$ باشد. پس آماره آزمون رابطه (2) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\chi^2&=2[\sup\{l(\theta);R\theta\geq 0\}-\sup\{l(\theta);R\theta=0\}]\\&=\inf\{(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta):Rt=0\}\\&\quad-\inf\{(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta):Rt\geq 0\}\\&\quad+O_P(1)\end{aligned}$$

اما ازآنجاکه $G_n=n^{-1/2}I_{\theta_0}S(\theta_0)$ در توزیع به متغیر تصادفی G دارای توزیع نرمال $p-$ متغیره $N_P\left(0,I_{\theta_0}^{-1}\right)$ میل می‌کند و تابع

$$\min_{R\theta}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)-\min_{R\theta\geq 0}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)$$

یک تابع پیوسته در G است، پس تابع

$$\min_{R\theta}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)-\min_{R\theta\geq 0}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)$$

به توزیع تابع

$$\min_{R\theta}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)-\min_{R\theta\geq 0}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)$$

میل خواهد کرد. بنابراین آماره آزمون χ^2 دارای توزیع مجانبی

$$\min_{R\theta}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)-\min_{R\theta\geq 0}(G_n-\theta)'I_{\theta_0}(G_n-\theta)$$

می‌باشد. برای یافتن توزیع این آماره، با توجه به قضیه 3، چون متغیر تصادفی $G_n-\theta$ دارای توزیع نرمال $p-$ متغیره $N_P\left(0,I_{\theta_0}^{-1}\right)$ است، بنابراین براحتی دیده می‌شود که تساوی (3) برقرار می‌باشد.

توجه شود که طبق رابطه (3) مقادیر احتمالات $w_k\left(s,R\mathrm{I}_\theta^{-1}R'\right)$، $k=0,1,\dots,s$، با توجه به مقدار s و ماتریس R متفاوت خواهد بود. برای سطوح معنی‌داری $\alpha=0/1,0/05,0/025,0/01,0/005$ و با توجه به مقادیر احتمالات $w_k\left(s,R\mathrm{I}_\theta^{-1}R'\right)$، مقادیر بحرانی آزمون محاسبه و در جدول 1 آورده شده‌اند. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو توان آماره آزمون برای سطوح مختلف معنی‌داری بر اساس 20000 بار تکرار برآورد و در جدول 2 آورده شده‌اند.

جدول 1. مقادیر بحرانی آماره آزمون در سطوح مختلف معنی‌داری

s	(w_0, w_1)	$a = 0/1$	$a = 0/05$	$a = 0/025$	$a = 0/01$	$a = 0/005$
1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4/572	4/980	5/533	6/408	7/245
	$(1,0)$	4/106	4/763	5/460	5/772	6/481
	$(0,1)$	3/795	4/801	5/211	5/824	6/503
2	(w_0, w_1, w_2)					
	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	5/766	7/146	8/754	10/503	11/892
	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	5/220	6/905	7/754	9/125	10/320
	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4/845	6/443	8/441	10/905	11/612
	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	6/220	8/040	10/216	11/772	13/054
	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	7/603	8/558	10/491	13/701	14/322
	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	7/570	9/233	12/068	13/723	14/510
s 3	(w_0, w_1, w_2, w_3)					
	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$	8/405	9/711	12/566	14/801	16/623
	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$	7/112	8/804	10/526	11/927	13/760
	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$	8/085	10/241	12/330	13/762	15/206
	$(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	8/203	9/880	11/392	13/041	15/590
	$(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	9/100	11/203	13/611	14/844	15/705
	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	8/562	9/922	11/446	12/850	14/334
s 4	$(w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)$					
	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0)$	9/641	11/558	14/207	16/120	17/902
	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0)$	9/803	12/219	14/104	15/410	16/337
	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	10/544	11/525	13/397	15/403	17/015
	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8})$	10/337	12/740	14/055	16/218	18/761
	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	9/577	11/024	12/836	14/901	15/852
	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0)$	8/259	10/406	11/870	13/651	14/733

جدول 2. توان آماره آزمون در سطوح مختلف معنی‌داری

s	(w_0, w_1)	$a=0/1$	$a=0/05$	$a=0/025$	$a=0/01$	$a=0/005$
1	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	0/781	0/726	0/650	0/613	0/549
	$(1,0)$	0/685	0/643	0/592	0/511	0/470
	$(0,1)$	0/704	0/662	0/595	0/522	0/488
2	(w_0, w_1, w_2)					
	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$	0/837	0/764	0/710	0/682	0/612
	$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$	0/754	0/693	0/660	0/586	0/583
	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	0/670	0/604	0/577	0/525	0/481
	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	0/719	0/664	0/610	0/573	0/527
	$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$	0/681	0/651	0/613	0/584	0/526
	$(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$	0/814	0/775	0/721	0/655	0/594
s 3	(w_0, w_1, w_2, w_3)					
	$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$	0/738	0/722	0/643	0/635	0/621
	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0)$	0/743	0/706	0/654	0/615	0/588
	$(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},0)$	0/753	0/724	0/690	0/683	0/650
	$(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$	0/740	0/725	0/681	0/633	0/576
	$(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$	0/772	0/751	0/711	0/669	0/642
	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	0/646	0/631	0/585	0/570	0/533
s 4	$(w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)$					
	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},0)$	0/772	0/725	0/685	0/549	0/586
	$(\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8},0)$	0/795	0/727	0/655	0/604	0/582
	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,\frac{1}{8},\frac{1}{8})$	0/694	0/650	0/611	0/576	0/554
	$(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{8},0,\frac{1}{8})$	0/820	0/777	0/729	0/684	0/625
	$(\frac{1}{4},\frac{1}{2},0,\frac{1}{8},\frac{1}{8})$	0/739	0/705	0/688	0/641	0/610
	$(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{8},0)$	0/673	0/651	0/633	0/594	0/572

همان‌طور که از جدول 1 ملاحظه می‌شود برای هر مقدار s، $s = 1,2,3,4$ و $(w_0, w_1, \dots, w_s)$، با کاهش سطح معنی‌داری، مقدار بحرانی آماره آزمون در حال افزایش است. همچنین از جدول 2 استنباط می‌شود که برای هر مقدار s، $s = 1,2,3,4$ و $(w_0, w_1, \dots, w_s)$، با افزایش سطح معنی‌داری، توان آزمون نیز در حال افزایش است.

مثال‌های عددی

مثال 1: فرض کنید X یک بردار تصادفی دارای توزیع نرمال دومتغیره $N_2(\theta, I)$، که در آن ماتریس واریانس کواریانس I ماتریسی همانی 2×2 و $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ میانگین توزیع باشد. برای متغیرهای تصادفی و مستقل $X_n, \dots, X_2, X_1$ هدف آزمون کردن فرضیه $H_a: \theta_1 = \theta_2 = 0$ در مقابل H_b، که در فرضیه H_b تمام مقادیری از θ_1 و θ_2 قرار دارند که برای آنها با توجه به ماتریس $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، حداقل یکی از مولفه‌های بردار $R\theta$ بزرگ‌تر از صفر باشد. برای مثال فرضیه $H_b: \theta_1 \geq 0 \,, \theta_2 \geq 0$ را در نظر بگیرید. به‌راحتی دیده می‌شود که ماتریس R دارای رتبه کامل بوده و با توجه به مقادیر θ_1 و θ_2 در فرضیه‌های H_a و H_b، آزمون فرضیه‌های

$$H_0: \quad R\theta = 0$$
$$H_1: \quad R\theta \geq 0$$

را خواهیم داشت. بنابراین با توجه به تابع چگالی نرمال دوبعدی

$$f(\mathrm{x}; \theta) = \frac{1}{(2\pi)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\theta)' I (X-\theta)\right\} \qquad -\infty < x < \infty$$

تابع درستنمایی برای یک نمونه n تایی تصادفی و مستقل عبارت است از:

$$l(\theta)\, \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\{-\frac{1}{2} tr \left[I \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' + n(\bar{x} - \theta)\,(\bar{x} - \theta)' \right]\}$$

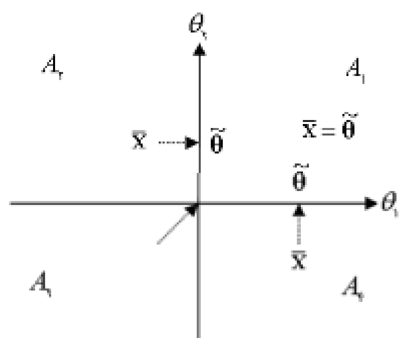
پس آماره آزمون کی دو به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= -2 ln\lambda \\ &2[\sup\{l(\theta); R\theta \geq 0\} \\ &- \sup\{l(\theta); R\theta = 0\}] \\ &= n\{\|\overline{X}\|^2 - \|\overline{X} - \tilde{\theta}\|^2\} = n\|\tilde{\theta}\|^2 \end{aligned} \tag{4}$$

که در آن $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ برآورد پارامتر تحت فرضیه یک‌طرفه H_1 برای تمام مقادیری از θ_1 و θ_2 است که برای آنها $R\theta \geq 0$، با حداقل یک نامساوی اکید، برقرار باشد. حال با توجه به اینکه $H_b: \theta_1 \geq 0 \,, \theta_2 \geq 0$، چهار ناحیه A_4, A_3, A_2, A_1 که به‌ترتیب ناحیه ربع اول، ناحیه ربع دوم، ناحیه ربع سوم و ناحیه ربع چهارم درون صفحه مختصات هستند را در نظر بگیرید. در این‌صورت کاملاً بدیهی است که مقدار $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ تحت این چهار ناحیه عبارتند از:

$$\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \begin{cases} (\bar{X}_1, \bar{X}_2) & \bar{X} \in A_1 \\ (0, \bar{X}_2) & \bar{X} \in A_2 \\ (0,0) & \bar{X} \in A_3 \\ (\bar{X}_1, 0) & \bar{X} \in A_4. \end{cases}$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی بردار پارامتر $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ تحت محدودیت $R\theta \geq 0$ برای هر چهار ناحیه در شکل 1 نشان داده شده است.



شکل 1. برآورد ماکسیمم درستنمایی بردار پارامتر θ تحت محدودیت $R\theta \geq 0$

با توجه به آماره آزمون داده شده در رابطه (4)

$$
\begin{aligned}
P_{H_0}(LRT \ge c|\bar{X} \in A_1) &= P_{H_0}\left(n\|\tilde{\theta}\|^2 \ge c\middle|\bar{X} \in A_1\right) \\
&= P_{H_0}(n(\bar{X}_1^2 + \bar{X}_2^2) \ge c) \\
&= P(\chi_2^2 \ge c)
\end{aligned}
$$

همچنین روابط زیر برقرار هستند:

$$
\begin{aligned}
P_{H_0}(LRT \ge c|\bar{X} \in A_2) &= P_{H_0}\left(n\|\tilde{\theta}\|^2 \ge c\middle|\bar{X} \in A_2\right) \\
&= P_{H_0}(n\bar{X}_2^2 \ge c) \\
&= P(\chi_1^2 \ge c)
\end{aligned}
$$

$$P_{H_0}(LRT \ge c|\bar{X} \in A_3) = 0$$

و

$$
\begin{aligned}
P_{H_0}(LRT \ge c|\bar{X} \in A_2) &= P_{H_0}\left(n\|\tilde{\theta}\|^2 \ge c\middle|\bar{X} \in A_2\right) \\
&= P_{H_0}(n\bar{X}_2^2 \ge c) \\
&= P(\chi_1^2 \ge c)
\end{aligned}
$$

بنابراین طبق رابطه (3)، برای هر $c > 0$، توزیع مجانبی آماره آزمون عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_{H_0}(LRT \ge c) &= \left(\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)P(\chi_1^2 \ge c) \\
&+ \left(\tfrac{1}{4}\right)P(\chi_2^2 \ge c)
\end{aligned} \tag{5}
$$

که در آن اعداد 1/4، 1/2 و 1/4 وزن‌های مورد نظر هستند. برای مطابقت با رابطه (3)، اگر χ_0^2 نشان‌دهنده توزیع کای اسکور با صفر درجه آزادی باشد، آنگاه χ_0^2 با احتمال یک مقدار صفر را اختیار می‌کند. در این‌صورت رابطه (5) عبارت است از:

$$\lim_{n\to\infty} P_{H_0}(LRT \ge c) = \sum_{k=0}^{2} w_k P(\chi_k^2 \ge c)$$

که در آن $(w_0, w_1, w_2) = (0.25, 0.5, 0.25)$ است.

مثال 2: (سیل‌واپول[1]، 1994) آزمایشی برای ارزیابی میزان سمی بودن ماده 9-آمینواکریدین[2] همراه با کرومات پتاسیم[3] (اثر متقابل این دو ماده) در

1. Silvapulle, M.J.
2. 9-Aminoacridine
3. Potassium chromate

حضور آنتروباکتریای اشریشیا کُلی[4] روی تعدادی موش انجام شده است. برای انجام این آزمایش پنج سطح مختلف از کرومات پتاسیم، دو سطح 0 و 40 از آنتروباکتریا و در هر سطح تعداد 192 موش در نظر گرفته شده است. داده‌ها در جدول 3 ارائه شده‌اند.

جدول 3. ارزیابی سمی بودن ماده 9-آمینواکریدین همراه با کرومات پتاسیم

	KCr(μm)				
$A-9(\mu m)$	U	1.4	2.9	4.3	5.7
U	U	9	3	1	3
40	49	92	19	77	$6C$

برای بررسی اثر متقابل دو ماده 9-آمینواکریدین و کرومات پتاسیم مدل اولیه مدل جنبشی مستقل ساده[5] است. دلیل انتخاب چنین مدلی در پیگورش (1990) بحث شده است. نشان داد که مدل

$$\log(1-\pi_{ij}) = \mu + \alpha_i + \tau_j + \eta_{ij} \tag{6}$$

که $i = 1,2$ و $j = 1,2,3,4,5$ با $\alpha_1 = \beta_1 =$ $\eta_{1j} = \eta_{i1} = 0$ برای بررسی اثر متقابل مناسب می‌باشد. در مدل (6)، π_{ij} احتمال وجود پاسخ برای سلول (i,j) است. همچنین فرض کنید $\theta = (\mu, \alpha_2, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}, \eta_{25})'$، $\lambda = (\mu, \alpha_2, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)'$ و $\psi = (\eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}, \eta_{25})'$ باشد. تعداد پارامترهای π_{ij} در مدل (6) برابر با تعداد پارامترهای طرف راست آن و مساوی با 10 است. همچنین اگر برای هر i و j، $\eta_{ij} = 0$ باشد، آنگاه مدل جنبشی مستقل ساده برقرار است. در صورتی که η_{ij} غیر منفی یا حداقل یکی از آنها مثبت باشد، انحراف از مدل جنبشی مستقل ساده است. بنابراین فرضیه‌های زیر برقرار هستند:

$$
\begin{aligned}
&H_0^*: \quad \eta = 0 \\
&H_1 \quad\ \ \eta \ge 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

4. Escherichia coli
5. Simple independent action model
6. Positive response

چارچوب آزمون فرضیه داده شده در رابطه (7) با در نظر گرفتن ماتریس $R = [0, I_4]$ که I_4 ماتریس همانی 4×4 و صفر ماتریسی 6×4 از صفرها می‌باشد، عبارت است از:

$$H_0: \quad R\theta = 0$$
$$H_1: \quad R\theta \geq 0$$

برای سلول (i,j)، n_{ij} و y_{ij} به‌ترتیب تعداد موش‌های آزمایش شده و تعداد پاسخ‌های مثبت هستند. در این صورت تابع درستنمایی عبارت است از:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{5}[y_{ij} log\pi_{ij} + (n_{ij} - y_{ij})\log(1-\pi_{ij}) + c_{ij}] \quad (8)$$

که در آن $c_{ij} = n_{ij}!\{y_{ij}!(n_{ij} - y_{ij})!\}^{-1}$ است. آنگاه

$$LRT = 2\{\max_{\theta \in H_1} l(\theta) - \max_{\theta \in H_0} l(\theta)\} = 2\{\max_{\psi \geq 0} l(\theta) - \max_{\psi = 0} l(\theta)\} \quad (9)$$

با توجه به تابع درستنمایی رابطه (8) و داده‌های جدول 3، با کمی محاسبه مقدار آماره آزمون برابر با 60.5 است. به دلیل اینکه توزیع تحت فرضیه صفر آماره آزمون (9) به‌سادگی به‌دست نمی‌آید، برای پذیرش یا رد فرضیه صفر، مقدار احتمال آماره آزمون محاسبه شده است:

$$p - value = \left(\frac{1}{2}\right) P(\chi_3^2 \geq 60.5) + \left(\frac{1}{2}\right) P(\chi_4^2 \geq 60.5) \quad (10)$$

مقدار احتمال رابطه (10) از عدد 0.00 کمتر بوده و بنابراین فرضیه صفر رد و فرضیه H_1 مورد قبول است. به عبارت دیگر با توجه به نتایج به‌دست آمده، اثر متقابل دو ماده 9-آمینواکریدین و کرومات پتاسیم قابل پذیرش است.

نتیجه‌گیری

آزمون فرضیه صفر ترکیب خطی بردار پارامتر $p-$بعدی در ارتباط با یک ماتریس معلوم $r \times p$ بعدی و دارای رتبه کامل در مقابل فرضیه یک‌طرفه ترکیب خطی بردار پارامتر برای یک توزیع $p-$متغیره پیوسته در نظر گرفته شد. فرم کلی آماره آزمون با روش نسبت درستنمایی محاسبه و توزیع مجانبی آماره آزمون تحت فرضیه صفر به‌دست آمد. مقادیر بحرانی آماره آزمون برای سطوح مختلف معنی‌داری محاسبه و توان آزمون با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برآورد شد. دیده شد که برای هر مقدار $s > 0$ و $(w_0, w_1, \dots, w_s)$، با کاهش سطح معنی‌داری، مقدار بحرانی آزمون افزایش ولی توان آماره آزمون کاهش یافت. همچنین با مثال‌های عددی مسئله آزمون فرضیه ارائه شده در مقاله مورد بررسی قرار گرفت.

تقدیر و تشکر: نویسنده از سردبیر محترم مجله گستره علوم آماری و داوران محترم به خاطر پیشنهادات ارزشمند ایشان که موجب تغییرات اساسی در راستای هر چه بهتر شدن مقاله شد، نهایت تشکر را دارد.

منابع

بازیاری، ا.، چینی‌پرداز، ر. و راسخی، ع.ا. (1390). آزمون فرض تساوی میانگین‌ها در مقابل فرض مرتب شده در توزیع نرمال چند متغیره، *مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، دوره 1، شماره 1.

بازیاری، ا. (1394). منظرهایی از آزمون فرضیه میانگین‌های مرتب شده در توزیع‌های نرمال یک متغیره و چند متغیره، *پذیرش برای چاپ در مجله علوم آماری*.

Bartholomew, D.J. (1959a). A test of homogeneity for ordered alternatives. Biometrika, 46, 36-48.

Bartholomew, D.J. (1959b). A test of homogeneity for ordered alternatives II. Biometrika, 6, 328-335.

Bazaraa, M. S., Sherali, H.D. and Shetty. C.M. (1993). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Springer-Verlag, Berlin.

Bazyari, A. and Chinipardaz, R. (2012). A Test for Order Restriction of Several Multivariate Normal Mean Vectors against all Alternatives when the Covariance Matrices are Unknown but Common, Journal of Statistical Theory and Applications, 11(1), 23-45.

Bazyari, A. and Chinipardaz, R. (2013). Upper Bound for p- Value of the Test of Multivariate Normal Ordered Mean Vectors against all Alternatives, Communications in Statistics-Theory and Methods, 42, 1748–1758.

Bazyari, A. and Pesarin, F. (2013), Parametric and Permutation Testing for Multivariate Monotonic Alternatives, Statistics and Computing, 23, 639–652.

Cox, D.R. and Hinkley, D.V. (1974). Theoretical Statistics. Chapman and Hall, London.

Gourieroux, C., Holly, A. and Monfort, A. (1982). Likelihood ratio tests, Wald test, and Kuhn-Tucker test in linear models with inequality constraints on the regression parameters. Econometrica, 50, 63-80.

Kudo, A. (1963). A multivariate analogue of the one-sided test. Biometrika, 50, 403-418.

Kudo, A. and Choi, J.R. (1975). A generalized multivariate analogue of the one-sided test. Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, 29(2), 303-328.

Perlman, M.D. (1969). One-sided testing problems in multivariate analysis. The Annals of Mathematical Statistics, 40(2), 549-567.

Robertson, T., Wright, F.T. and Dykstra, R.L. (1988). Order Restricted Statistical Inference. John Wiley, New York.

Sasabuchi, S. and Kulatunga, D.D. (1985). Some approximations for the null distribution of the $\bar{E}^2$ statistic used in order restricted inference. Biometrika, 72, 476-480.

Sen, P.K. and Singer, J.M. (1993). Large Sanple Methods in Statistics: An introduction with applications. Chapman and Hall, London.

Shapiro, A. (1985). Asymptotic equivalence of minimum discrepancy function estimatiors to G.L.S. estimators. South African Statistical Journal, 19, 73-81.

Shapiro, A. (1988). Towards a unified theory of inequality constrained testing in multivariate analysis. International Statistical Review. 56, 49-62.

Silvapulle, M.J. (1994). On tests against one-sided hypotheses in some generalized linear models. Biometrics, 50, 853-858.

Silvapulle, M.J. (1996). On an F-type statistic for testing one-sided hypotheses and computation of chi-bar-squared weights. Statistics and Probability Letters. 28, 137-141.

Silvapulle, M.J. and Sen, P.K. (2005). Constrained Statistical Inference: Inequality, Order, and Shape Restrictions, John Wiley, New York.

Tang, D.I., Gnecco, C. and Geller, N. (1989). An approximate likelihood ratio test for a normal mean vector with nonnegative components with application to clinical trials. Biometrika, 76, 577-583.